المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

دليل المعلم

الرياضيات

الصف الثاني عشر

الفرعان:
الأدبي، والفندقي والسياحي

دليل المعلم/ الرياضيات الصف الثاني عشر الفرعان: الأدبي، والفندقي والسياحي

الطبعة الأولى ١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

ISBN : 978-9957-84-849-1

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

دليل المعلم

الرياضيات

الصف الثاني عشر

الفرعان: الأدبي، والفندقي والسياحي

الناشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الدليل عن طريق العناوين الاتية:
هاتف: ٨-٥/٤٦١٧٣٠٤، فاكس: ٤٦٣٧٥٦٩، ص.ب: ١٩٣٠، الرمز البريدي: ١١١١٨،
أو بوساطة البريد الإلكتروني: E-mail:Scientific.Division @ moe.gov. jo .

قررت وزارة التربية والتعليم استخدام هذا الدليل في مدارس المملكة الأردنية الهاشمية جميعها، بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم(٦٦ /٢٠١٨)، تاريخ ٢٥ / ٩ /٢٠١٨م، بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٩م/٢٠٢٠م.

الحقوق جميعها محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عمّان – الأردن / ص. ب: ١٩٣٠

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(٢٠١٨/١٠/٥٥٣٢)
ISBN:978-9957-84-849-1

اللجنة الوطنية المتخصصة للإشراف على تأليف الدليل

أ.د. حسن زارع هديب
د. معاذ محمود الشياب
د. خولة صالح أبو الهيجاء
نقين أحمد جوهر

المؤلفون

جهاد حسين أبو الركب
د. أحمد جميل المساعفة
كمال أسعد لحلوح
إسماعيل علي صالح
روان يوسف علي

التحرير العلمي: نقين أحمد جوهر

التحرير اللغوي: نضال أحمد موسى
التحرير الفني: نداء فؤاد أبو شنب
التصميم: نايف «محمد أمين» مراشدة
الإنتاج: د.عبدالرحمن سليمان أبو صعيليك

دقق الطباعة: جهاد حسين أبو الركب، إسماعيل علي صالح
راجعها: نقين أحمد جوهر

الطبعة الأولى
١٤٤٠هـ/٢٠١٩م

قائمة المحتويات

الموضوع | الصفحة

المقدمة ٥
مفردات الدليل..... ٦
نموذج تحليل محتوى (وحدة دراسية)..... ٨
نموذج خطة فصلية (وحدة دراسية)..... ٩

الفصل الدراسي الأول

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال ١٣

الفصل الأول: النهايات ١٦
أولًا: مفهوم النهاية..... ١٦
ثانيًا: نظريات النهايات..... ١٩
ثالثًا: نهاية خارج قسمة اقترانين..... ٢٤
رابعًا: نهاية اقتران الجذر النوني..... ٢٩
الفصل الثاني: الاتصال..... ٣٢
أولًا: الاتصال عند نقطة..... ٣٢
ثانيًا: نظريات الاتصال..... ٣٥
إجابات أسئلة الوحدة ٣٩

الوحدة الثانية: التفاضل ٥٧

الفصل الأول: المشتقة ٦٠
أولًا: معدل التغير ٦٠
ثانيًا: المشتقة الأولى ٦٤
الفصل الثاني: قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا..... ٦٧
أولًا: قواعد الاشتقاق ٦٧
ثانيًا: قاعدة السلسلة ٧١
ثالثًا: مشتقات الاقترانات المثلثية ٧٥
رابعًا: المشتقات العليا ٧٩
إجابات أسئلة الوحدة ٨٣

الوحدة الثالثة: تطبيقات التفاضل ٩٣

الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة ٩٦
أولًا: التفسير الهندسي..... ٩٦
ثانيًا: التفسير الفيزيائي..... ٩٩
الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق..... ١٠٢
أولًا: التزايد والتناقص..... ١٠٢

الموضوع	الصفحة

ثانيًا: القيم القصوى ١٠٥
الفصل الثالث: تطبيقات ١٠٨
أولًا: تطبيقات على القيم القصوى. ١٠٨
ثانيًا: تطبيقات اقتصادية على التفاضل..... ..... ١١١
إجابات أسئلة الوحدة ١١٤

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة: التكامل وتطبيقاته ١٢٣

الفصل الأول: التكامل ١٢٤
أولًا: التكامل غير المحدود ١٢٤
ثانيًا: التكامل المحدود ١٢٩
ثالثًا: خصائص التكامل المحدود ١٣٢
رابعًا: التكامل بالتعويض ١٣٥
الفصل الثاني: تطبيقات التكامل..... ١٣٩
أولًا: تطبيقات هندسية ١٣٩
ثانيًا: تطبيقات فيزيائية ١٤١
ثالثًا: المساحة ١٤٤
الفصل الثالث: الاقترانان اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي وتطبيقاتهما..... ١٥٠
أولًا: الاقترانان اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي ١٥٠
ثانيًا: النمو والاضمحلال ١٥٦
إجابات أسئلة الوحدة ١٦٠

الوحدة الخامسة: الإحصاء والاحتمالات ١٦٥

الفصل الأول: طرائق العد ١٦٨
أولًا: مبدأ العد ١٦٨
ثانيًا: التباديل ١٧٢
ثالثًا: التوافيق ١٧٥
الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة..... ١٧٨
أولًا: المتغير العشوائي المنفصل، وتوزيع ذات الحدين ١٧٨
ثانيًا: العلامة المعيارية ١٨٢
ثالثًا: التوزيع الطبيعي ١٨٥
الفصل الثالث: الارتباط والانحدار..... ١٨٨
أولًا: الارتباط ١٨٨
ثانيًا: الانحدار ١٩١
إجابات أسئلة الوحدة ١٩٣

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على رسوله الأمين، وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد، فقد جاء هذا الدليل ليكون مرشدًا للمعلم في تدريس المفاهيم الرياضية التي تضمنها الكتاب المدرسي، ومعززًا لتقويم الطلبة، بما يحقق النتاجات التعلمية المنشودة.

يعدُّ الدليل إحدى الركائز الأساسية لتحقيق المنهاج؛ إذ تضمن تخطيط الدروس بما يتلاءم ومستويات الطلبة والبيئة الصفية وأهداف المبحث، وتحقيق التكامل بين النظرية والتطبيق.

لقد ارتبط الدليل ارتباطًا مباشرًا بالمفاهيم التي ورد ذكرها في الكتاب المدرسي، وبالنتاجات التعلمية، واستراتيجيات التدريس والتقويم التي تنسجم وأهداف المنهج، ومعايير (NCTM، 2000) العالمية للرياضيات، فضلًا عن الاهتمام بتفعيل دور تكنولوجيا المعلومات والاتصالات بوصفها أداة لتعزيز التعلم الإيجابي؛ تخطيطًا، وتنفيذًا، وتقويمًا، ومراعاة توضيح الخطوات الرئيسة في أثناء تنفيذ خطة الدرس، وهي: التمهيد للدرس، ثم إجراءات تنفيذه، ثم ختمه.

ونحن إذ نقدِّم هذا الدليل، فإننا نعرض أمثلة واجتهادات تركِّز على أهمية استيعاب المفاهيم أولًا قبل البدء بالإجراءات والخوارزميات اللازمة للحلول، ولا نتوقع الوقوف عندها فحسب، بل أن تكون منطلقًا لتنمية الخبرات، وإبراز القدرات الإبداعية على وضع البدائل والأنشطة المتنوعة، وإضافة الجديد الذي يثري المحتوى، وبناء أدوات تقويم ذات معايير جديدة يمكن بها تقويم تعلم الطلبة على نحو فاعل.

والله ولي التوفيق

مفـردات الدليل

- **نتاجات التعلم**

نتاجات خاصة يتوقع أن يحققها الطلبة، وتتميز بشموليتها وتنوعها (معارف، مهارات، اتجاهات)، وتعدُّ مرجعًا للمعلم؛ إذ يبنى عليها المحتوى، وتمثل الركيزة الأساسية للمنهاج، وتسهم في تصميم نماذج المواقف التعلمية المناسبة، واختيار استراتيجيات التدريس، وبناء أدوات التقويم المناسبة لها.

- **عدد الحصص**

المدة الزمنية المتوقعة لتحقيق النتاجات.

- **المفاهيم والمصطلحات والرموز**

العناصر المفتاحية للمفاهيم والمصطلحات والرموز الأساسية التي ورد ذكرها في الدرس، والتي يجب التركيز عليها عند تخطيط موقف تعليمي.

- **التكامل الرأسي**

ربط المفهوم الوارد في الدرس بمفاهيم وردت سابقًا في المبحث نفسه.

- **التكامل الأفقي**

ربط المفهوم الوارد في الدرس بمفاهيم وردت في مباحث أخرى.

- **التعلم القبلي**

المعارف والمهارات المرتبطة بموضوع الدرس التي تعلمها الطالب سابقًا.

- **مصادر التعلم**

مصادر تعلمية يمكن للطالب والمعلم الرجوع إليها؛ بهدف إثراء معلوماتهما وخبراتهما، والإسهام في تحقيق النتاجات، وهي تشمل كتبًا، وموسوعات، ومواقع إلكترونية، وأقراصًا مدمجة، وزيارات ميدانية، ومقابلات أشخاص.

- **استراتيجيات التدريس**

الخطوات والإجراءات المنظمة التي يقوم بها المعلم وطلبته لتنفيذ الموقف التعليمي التعلمي، وهي خطوات مقترحة يمكن للمعلم تطويرها أو تغييرها بما يتلاءم وظروف الطلبة وإمكانات المدرسة، مع مراعاة توظيف تكنولوجيا المعلومات والاتصالات (ICT) عند الحاجة.

- **إجراءات التنفيذ**

خطوات تهدف إلى تنظيم الموقف التعليمي وضبطه؛ لتسهيل تنفيذ الدرس بكفاءة، ومن أمثلتها:

١ – تنظيم جلوس الطلبة (مجموعات، حلقة دائرية، حرف U،...).

٢ – تهيئة البيئة الصفية (إنارة كافية، تهوية، نظافة،...).

٣ – تجهيز الأدوات والمواد اللازمة لتنفيذ الدرس.

٤ – إثارة دافعية الطلبة إلى التعلم.

٥ – استخدام أوراق العمل، وأدوات التقويم المناسبة، والأنشطة المتضمنة.

- **معلومات إضافية**

معلومات إثرائية موجزة، ذات علاقة بالمحتوى، تهدف إلى إثراء المعرفة في المحتوى، وإرشاد المعلم إلى استخدام مصادر تعليمية متنوعة، علمًا بأن الطالب غير مكلَّف بدراستها لامتحان الثانوية العامة.

- **أخطاء شائعة**

توقعات لأخطاء محتملة شائعة بين الطلبة، وهي تتعلق بالمهارات والمفاهيم والقيم الوارد ذكرها في الكتاب المدرسي، وتقديم معالجة لهذه الأخطاء.

- **الفروق الفردية**

مجموعة الأنشطة والأسئلة والإضافات التي تضمنها المحتوى، والتي أُعِدَّت لتناسب حاجات الطلبة وقدراتهم المتنوعة.

- **استراتيجيات التقويم وأدواته**

الطرائق والخطوات والإجراءات المنظمة التي يقوم بها المعلم أو الطلبة لتقويم الموقف التعليمي، وقياس مدى تحقق النتاجات، وهي عملية مستمرة في أثناء تنفيذ الموقف التعليمي، يمكن تطويرها، أو بناء نماذج أخرى مشابهة لها تُطبَّق بالتكامل مع إجراءات إدارة الصف.

نموذج تحليل محتوى (وحدة دراسية)

المبحث: الرياضيات.

الصف: الثاني عشر.
الفرع: الأدبي.

عنوان الوحدة: تطبيقات التفاضل.

عدد الفصول: (٣) فصول.

الصفحات: (١١٦ – ١٥٥).

المحتوى	المفاهيم والمصطلحات	الرموز	التعميمات	المهارات	المسائل الرياضية
الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة. أولًا: التفسير الهندسي. ثانيًا: التفسير الفيزيائي. **الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق.** أولًا: التزايد والتناقص. ثانيًا: القيم القصوى. **الفصل الثالث: تطبيقات.** أولًا: تطبيقات على القيم القصوى. ثانيًا: تطبيقات اقتصادية على التفاضل.	– ميل المماس. – نقطة التماس. – معادلة المماس. – السرعة اللحظية. – التسارع اللحظي. – انعدام التسارع. – التزايد. – التناقص. – قيم قصوى. – قيمة عظمى محلية. – قيمة صغرى محلية. – النقط الحرجة. – أكبر ما يمكن. – أقل ما يمكن. – التكلفة الكلية. – التكلفة الحدية. – الإيراد الكلي. – الإيراد الحدي. – الربح. – الربح الحدي.	– ع(ن): السرعة. – ت(ن): التسارع. – ف(ن): المسافة. – ك(س): التكلفة الكلية. – كَ(س): التكلفة الحدية. – د(س): الإيراد الكلي. – دَ(س): الإيراد الحدي. – ر(س): الربح. – رَ(س): الربح الحدي.	ع(ن) = فَ(ن). ت(ن) = عَ(ن) = فً(ن). – نظرية التزايد والتناقص، صفحة (١٢٨). – اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى، صفحة (١٣٥). – اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى، صفحة (١٣٨). – مساحة المثلث= نصف طول القاعدة × الارتفاع. مساحة المربع = (طول الضلع)^2. مساحة المستطيل = الطول × العرض. – حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع. – اقتران الإيراد الكلي: د(س) = ك(س) + ر(س). – اقتران الربح: ر(س) = د(س) – ك(س). – اقتران الربح الحدي: رَ(س) = دَ(س) – كَ(س).	– تفسير المشتقة الأولى هندسيًّا. – توظيف تفسير المشتقة الهندسي في حل مسائل تتضمن إيجاد معادلة المماس. – تفسير المشتقة الأولى والمشتقة الثانية فيزيائيًّا. – توظيف تفسير المشتقة الفيزيائي في حل مسائل عملية. – إيجاد مجالات التزايد والتناقص للاقتران باستخدام المشتقة الأولى. – تحديد القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الأولى واختبار المشتقة الثانية. – حل مسائل تطبيقية على القيم القصوى. – حل مسائل اقتصادية تتعلق بالقيم القصوى.	– نشاط التفسير الهندسي، صفحة (١١٨). – فكر وناقش، صفحة (١٣١). – التدريب (٢)، صفحة (١٤٥). – السؤال (٣) من أسئلة الوحدة، صفحة (١٥٤).

المبحث: الرياضيات. | نموذج خطة فصلية (وحدة دراسية) | الصف: الثاني عشر.

عنوان الوحدة: تطبيقات التفاضل. | الفصل الدراسي: الأول. | الفرع: الأدبي.

عدد الفصول: (٣) فصول | الصفحات: (١١٦-١٥٥). | عدد الحصص: ..... | الفترة الزمنية: من: ..... إلى: .....م.

المحتوى	النتاجات التعلمية	المواد والتجهيزات (مصادر التعلم)	استراتيجيات التدريس	التقويم		الأنشطة المرفقة	التأمل الذاتي للوحدة
				الاستراتيجيات	الأدوات		
الفصل الأول: التفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة. أولًا: التفسير الهندسي. ثانيًا: التفسير الفيزيائي. **الفصل الثاني: تطبيقات الاشتقاق.** أولًا: التزايد والتناقص. ثانيًا: القيم القصوى. **الفصل الثالث: تطبيقات.** أولًا: تطبيقات على القيم القصوى. ثانيًا: تطبيقات اقتصادية على التفاضل.	– يجد الميل ومعادلة المماس لمنحنى الاقتران. – يحل مسائل تطبيقية على المسافة، والسرعة، والتسارع، مبررًا الحل. – يحدد فترات التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الأولى. – يحدد القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الأولى، واختبار المشتقة الثانية. – يحل مسائل تطبيقية على القيم القصوى.	– الكتاب المدرسي. – دليل المعلم. – أسئلة امتحانات الثانوية العامة. – موقع منصة إدراك للتعلم المدرسي. – أوراق العمل.	– التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة). – التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي). – التدريس المباشر (التدريبات والتمارين). – التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي). – التعلم في مجموعات (فكر– انتقِ زميلًا – شارك). – حل المشكلات والاستقصاء. – استراتيجية بوليا لحل المسألة.	– التواصل (الأسئلة والأجوبة). – الملاحظة (الملاحظة المنظمة). –الملاحظة (الملاحظة التلقائية). – الورقة والقلم (الفقرات ذات الإجابة المفتوحة). – مراجعة الذات. – التقويم المعتمد على الأداء.	– قائمة الرصد. – سلم التقدير العددي. – سلم التقدير اللفظي. – سجل وصف سير التعلم. – بطاقة الخروج.	– نشاط التفسير الهندسي، صفحة (١١٨). –أوراق العمل. – حصة في مختبر الحاسوب لعرض مواقع إلكترونية تعليمية ومناقشتها.	– أشعر بالرضا عن: – التحديات التي واجهتها: – مقترحات للتحسين:

الفصل الدراسي الأول

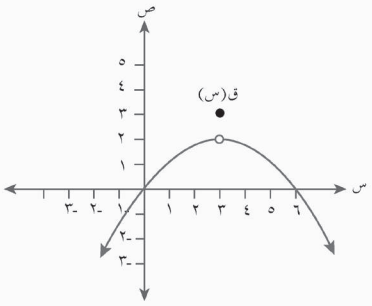
الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

١ النهايات والاتصال

Limits and Continuity

يعد التفاضل والتكامل أحد أهم محاور الرياضيات الرئيسة التي تعنى بحل المسائل التطبيقية المتنوعة في المجالات الهندسية والفيزيائية والاقتصادية. أما اللبنة الأساسية لفهم هذا المحور فتتمثل في موضوع النهايات الذي يبحث في سلوك الاقتران عندما يقترب المتغير س من عدد محدد، وموضوع الاتصال الذي يصف منحنى الاقتران، والذي يبين إذا كان يوجد اتصال عند نقطة محددة أم لا، واصفًا شكل عدم الاتصال هندسيًا.



يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تفسير مفهوم النهاية والصيغة المستخدمة في التعبير عن نهاية اقتران عند نقطة.
- حساب نهاية اقتران (كثير حدود، نسبي، متشعب) بيانيًا وجبريًا.
- تمييز نهاية اقتران عند نقطة، وقيمته عند هذه النقطة.
- دراسة الاتصال عند نقطة للاقترانات كثيرات الحدود، والاقترانات المتشعبة، والاقترانات النسبية.

تهيئة

١) ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

(١) إذا كان ق(س) = (س – ٢)^{٢}، فإن ق(– ١) يساوي:

أ) ١ ب) – ٣ جـ) – ١ د) ٩

(٢) إذا كان هـ(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٣}$، فإن قيمة هـ (٢):

أ) صفر. ب) – ٢٠ جـ) ٤ د) غير موجودة.

(٣) إذا كان هـ (س) = $\frac{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}{\text{س} - ٣}$، فإن مجال الاقتران هـ (س) هو:

أ) ح ب) ح – {٣} جـ) ح – {٢ ، ٣} د) {٢ ، ٣}

(٤) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س} + ٧ & ، \ \text{س} \in \text{ص} \\ ٤\text{س} + ١ & ، \ \text{س} \notin \text{ص} \end{cases}$ ، حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة،

فإن ق(– ٣) يساوي:

أ) ٤ ب) ١١ جـ) – ١١ د) ١٠

٢) إذا كان ق(س) = س^{٢} + ٣ س – ٤، فما قيمة كل من:

ق(–٢)، ق(–١)، ق(٠)، ق(١)، ق(٢)، ق(١,٣)؟

٣) إذا كان ق(س) = $\frac{٣ س - ١٥}{\sqrt{س + ٢٠} - ٥}$ ، فجد:

أ) ق(٥).

ب) مجال ق(س).

٤) جد ناتج ما يأتي في أبسط صورة:

$$هـ(س) = \frac{١}{س + ٨} - \frac{١}{٥}$$

٥) حل المعادلة الأسية الآتية:

$(٥)^{س^{٢}} = (٥)^{س}$.

إجابات أسئلة التهيئة

١)

١	٢	٣	٤
د	أ	ب	أ

٢) ق(−٢) = − ٦، ق(−١) = − ٦، ق(٠) = − ٤

ق(١) = صفرًا، ق(٢) = ٦، ق(١,٣) = ١,٥٩

٣) أ) ق(٥) غير معرفة. ب) مجال ق(س)= $[-٢٠، \infty) - \{٥\}$

٤) $هـ(س) = \frac{-(س+٣)}{٥(س + ٨)}$.

٥) $س^{٢} = س \Longleftarrow س^{٢} - س = ٠ \Longleftarrow س(س-١) = ٠ \Longleftarrow س = ٠ ، س = ١$

أولًا: مفهوم النهاية.

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

- يعرف نهاية اقتران ق(س) عندما تقترب س من العدد أ.
- يفسر نهاية اقتران عند نقطة ما.
- يحسب نهاية اقتران (كثير حدود، نسبي، متشعب) بيانيًّا وجبريًّا.
- يميز بين نهاية الاقتران عند نقطة وقيمته عند تلك النقطة.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

(س ← أ): س تقترب من أ.

(س ← $أ^{+}$): س تقترب من أ من اليمين.

(س ← $أ^{-}$): س تقترب من أ من اليسار.

نهـــــا ق(س): نهاية ق(س) عندما تقترب س من أ.
س ← أ

النهاية من اليمين، النهاية من اليسار، النهاية موجودة، النهاية غير موجودة.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصفوف (٨–١١)، خصائص منحنيات الاقترانات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (١٢–٢٠).

التعلم القبلي

الاقترانات الحقيقية، الاقترانات المتشعبة، كثيرات الحدود، مجال الاقتران، مدى الاقتران.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (أوراق العمل، الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر – انتقِ زميلًا – شارك)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في مفهوم الاقتران، والمجال، والمدى، وحساب قيمة الاقتران عند نقطة، مثل:

- إذا كان ق(س) = ٣ س – ٢، فما قيمة كل من:

ق(٢)، ق(١)، ق(٠)، ق(−١)، ق(−٢)، ق(١,٥)، ق(−١,٥)، ق(١,٩٩)؟

• إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س + ٢ & ، س \geq ١ \\ س^{٢} + ١ & ، س < ١ \end{cases}$ ، فجد قيمة كل من:

ق(١)، ق(٢)، ق(٣)، ق(٠)، ق(−١)، ق(٠,٩)، ق(٠,١٢).

٢- مناقشة تمثيل الاقترانات (الثابت، الخطي، التربيعي، المتشعب) بعد تمثيل المعلم لها بيانيًّا.

٣- توزيع ورقة العمل (١-١) على الطلبة، وتوجيههم إلى حلها ضمن مجموعات ثنائية.

٤- توضيح المقصود باقتراب المتغير س من عدد مثل أ، ودراسة سلوك الاقتران حين تقترب (س) من العدد (أ) من اليمين واليسار، والتعبير عن ذلك بالرموز للتوصل إلى تعريف نهاية الاقتران عند نقطة معلومة.

٥- مناقشة الطلبة في إجابات أسئلة ورقة العمل (١-١).

٦- توضيح شرط وجود النهاية للاقتران ق حين تقترب س من العدد أ، وهو اقتراب قيم ق(س) من عدد واحد (صورة واحدة) عند اقتراب س من أ من اليمين واليسار، وهذا يتطلب أن يكون الاقتران ق معرَّفًا على يمين أ، وعلى يسارها.

٧- مناقشة الطلبة في الأمثلة (١، ٢، ٣، ٤)، ثم تكليفهم حل التدريبات (١، ٢، ٣)، ومتابعتهم في هـذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٨- تكليف الطلبة حل أسئلة الدرس في الصفحة (٢٥)، علمًا أنه يمكن استخدام بعض الأساليب التي تثري تعلم الطلبة، وتساعدهم على الحل، مثل:

• أسلوب (تحدث إلى زميلك وناقش)، ثم الاستماع إلى بعض الطلبة عمّا دار بينهم من نقاش.

• توزيع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم تكليف كل مجموعة حل تدريب واحد فقط يحدده المعلم، ويمكن تكليف أكثر من مجموعة حل التدريب نفسه، ثم استماع أفراد المجموعات إلى بعضهم بعضًا مراعين عدم التكرار.

• تكليف الطلبة حل التدريبات فرديًّا، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٩- ختم الدرس بسؤال الطلبة: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟

معلومات إضافية

يُعْزى استعمال الرمز الحالي للنهاية إلى العالِم الإنجليزي جودفري هارولد هاردي (G.H.Hardy) (١٨٧٧م - ١٩٤٧م).

أخطاء شائعة

- قد يخطئ بعض الطلبة في إجراء العمليات الحسابية المتعلقة بالأعداد الصحيحة والكسور العشرية، ويمكن معالجة ذلك عن طريق حل المزيد من التمرينات، أو إعطاء الطلبة حصص تقوية.
- قد لا يميز بعض الطلبة بين قيمة النهاية حين تقترب قيمة س من عدد، وصورة ذلك العدد في قاعدة اقتران.
- قد يخطئ بعض الطلبة في إيجاد النهاية من جهة اليمين، أو من جهة اليسار عند التمثيل البياني لمنحنى اقتران.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة. أداة التقويم: قائمة الرصد (١- ١).

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات. أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١-٦).

الفروق الفردية

علاج

- إذا كان ق(س) = (٣س- ٥)^{٢}+٤، فجد ق(١)، ق(٠)، ق(-٢)، ق(١,٠).

إثراء

- إذا كان ق(س) = ٣س- ٣، فاملأ الفراغ في الجدول الآتي بما هو مناسب، ثم جد من الجدول نهـــــا ق(س):
س ← ٣-

س	٢,٩٩	٢,٩٩	٢,٩	٢,٥	٢,٤
ق(س)					

إجابات الأسئلة

١) أ) ق(٢) غير معرفة. ب) نهـــــا ق(س)= ٤ (س ← ٢)

جـ) ق(٣) = ٥ د) نهـــــا ق(س) = ٥ (س ← ٣)

٢) أ) نهـــــا ق(س) = ١ (س ← ٠,٥) ب) نهـــــا ق(س) = ٣ (س ← ٢+)

جـ) نهـــــا ق(س) = ٢ (س ← ٢-) د) نهـــــا ق(س) غير موجودة. (س ← ٢)

٣) أ) نهـــــا ق(س) = ٢ (س ← ٢) ب) نهـــــا ق(س) = ٢ (س ← ١)

جـ) أ = - ١ د) قيم ب هي - ٢ ، ٣

ثانيًا: **نظريات النهايات.**

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

- يتعرف نظريات النهايات.
- يستخدم نظريات النهايات في إيجاد نهاية اقتران، ونهاية مجموع اقترانين، ونهاية ناتج طرح اقترانين، وحاصل ضرب اقترانين عند نقطة.
- يحسب نهاية اقتران كثير حدود.
- يحسب نهاية اقتران متشعب عند نقطة التشعب (إن وُجِدت).

المفاهيم والمصطلحات والرموز

نهايـة الاقـتران الثابت، نهاية مجموع اقترانـين أو أكثر، نهاية حاصل طرح اقترانـين، نهاية حاصل ضرب اقترانين أو أكثر، نهاية اقتران مرفوع لقوة ن حيث ن عدد طبيعي، نهاية اقتران متشعب، نقطة التشعب.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصفوف (٨-١١)، خصائص منحنيات الاقترانات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٢١-٣٢).

التعلم القبلي

مفهوم النهاية، العمليات على كثيرات الحدود، الاقتران المتشعب.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (أوراق العمل)، التعلم في مجموعات (فكر - انتقِ زميلًا - شارك)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بتوزيع ورقة العمل (١- ٢) على الطلبة، ثم تكليفهم الإجابة عن أسئلتها ضمن مجموعات ثنائية.

٢- التجول بين الطلبة مُرشِدًا، ومُساعِدًا، ومُوجِّهًا.

٣- تعميم النتيجة التي توصل إليها الطلبة (الجزء الأول من النظرية ١).

٤- توزيع ورقة العمل (١-٣) على الطلبة، وتكرار الخطوات السابقة لاستنتاج الجزء الثاني من النظرية (١).

٥- تعميم النتيجة التي توصل إليها الطلبة (الجزء الثاني من النظرية ١).
٦- توزيع ورقة العمل (١-٤) على الطلبة، وتكرار الخطوات السابقة لاستنتاج نص النظرية (٢).
٧- مناقشة الطلبة في نص النظرية (٢)، وتفسير دلالاتها.
٨- مناقشة الطلبة في المثالين (١)، و(٢) بوصفهما تطبيقًا مباشرًا على النظرية (٢).
٩- مساعدة الطلبة على التوصل إلى النتيجة (١)، عن طريق الاستعانة بالجزء الأول من النظرية (١)، والجزء الثالث من النظرية (٢).
١٠- مساعدة الطلبة على تعميم الجزأين الأول والثالث من النظرية (٢) للتوصل إلى النتيجة (٢).
١١- مساعدة الطلبة على التعبير عن الجزء الثاني من النتيجة (٢) بطريقة أخرى:
$\lim_{س \to أ} (ق(س))^{ن} = (\lim_{س \to أ} ق(س))^{ن}$.
١٢- مناقشة الطلبة في المثال (٣) بوصفه تطبيقًا على النتيجة (٢).
١٣- مساعدة الطلبة على صياغة النتيجة (٣)، باستخدام النتيجة (١)، والنتيجة (٢).
١٤- مناقشة الطلبة في المثالين (٤)، و(٥)، ثم تكليفهم حل التدريبين (١)، و(٢)، وتبرير خطوات الحل.
١٥- مناقشة الطلبة في المثال (٦) للتوصل إلى النتيجة (٤)، ثم تكليفهم حل التدريب (٣)، ثم مناقشتهم في الإجابة.
١٦- مناقشة الطلبة في المثال (٧)، ثم تكليفهم حل التدريب (٤) ضمن مجموعات ثنائية، ثم مناقشتهم في الإجابة (يمكن تكليف الطلبة حل التدريب في البيت، ثم مناقشتهم في الإجابات في الحصة القادمة).
١٧- تقسيم الطلبة إلى مجموعات، ثم تكليفهم حل أسئلة الدرس في الصفحتين (٣١)، و(٣٢)، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم الطلب إليهم حل بقية الأسئلة في البيت.
١٨- ختم الدرس بسؤال الطلبة: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟

معلومات إضافية

إن عدم وجود $\lim_{س \to أ} ق(س)$، أو $\lim_{س \to أ} هـ(س)$ لا يعني عدم وجود نهاية لمجموع الاقترانين (ق(س) + هـ(س))، أو حاصل طرحهما (ق(س) − هـ(س))، أو حاصل ضربهما (ق(س) × هـ(س))، وإنما يعني عدم إمكانية تطبيق النظرية (٢) في هذه الحالة؛ فقد تكون هذه النهايات موجودة بالرغم من عدم وجود نهاية أحد الاقترانين أو كليهما. وعندئذٍ إمّا أن نكتب قاعدة الاقتران الجديد (ناتج الجمع، أو حاصل الطرح، أو حاصل الضرب) ثم نبحث في نهايته، وإمّا أن نُطبّق النظرية (٢) لإيجاد نهاية كل من الاقترانين (ق)، و(هـ) عند العدد أ من اليمين، واليسار (انظر السؤال (٢) من أسئلة الإثراء).

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة في إجراء العمليات الحسابية المتعلقة بالأعداد الصحيحة، والكسور، والكسور العشرية، وفي أولويات العمليات الحسابية الخاصة بالأعداد الحقيقية، ويمكن معالجة ذلك عن طريق حل المزيد من التمرينات، أو إعطاء الطلبة حصص تقوية.

الفروق الفردية

علاج

١) جد النهايات في ما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٢} ٩$

ب) $\lim_{س \to ٠} ٦,٥$

جـ) $\lim_{س \to ٧} س$

د) $\lim_{س \to ٢} ٥ - ٢س$

٢) إذا كان $\lim_{س \to ٤} ق(س) = ٨$، $\lim_{س \to ٤} ع(س) = -٣$، فجد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٤} (ق(س) + ع(س))$.

ب) $\lim_{س \to ٤} (ق(س) - ٢ ع(س))$.

جـ) $\lim_{س \to ٤} (ق(س) \times ع(س))$.

إثراء

١) إذا كانت $\lim_{س \to ٣} (٢ق(س) - ٣س + ٧) = ٨$، فجد $\lim_{س \to ٣} ق^{٢}(س)$.

٢) إذا كان ق(س)= $\begin{cases} ٢س + ٣ ، س \geq ١ \\ ٥ - ٤س ، س < ١ \end{cases}$ ، هـ(س)= $\begin{cases} ٢س + ٣ ، س \geq ١ \\ ٥ - ٤س ، س < ١ ، \end{cases}$

فجد قيمة كل مما يأتي (إن وُجِدت):

أ) $\lim_{س \to ١} ق(س)$.

ب) $\lim_{س \to ١} هـ(س)$.

ب) $\lim_{س \to ١} (ق(س) + هـ(س))$.

جـ) $\lim_{س \to ١} (ق(س) - هـ(س))$.

استراتيجية التقويم: التواصل.	أداة التقويم: سلم التقدير (١-٢).
استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.	أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١-٦).

إجابات الأسئلة

١)

أ) ٢٨	ب) ١٢	جـ) -١٦
د) ٤٠	هـ) ١٧	و) -٦
ز) ٢٠		

٢)

أ) ٦٩	ب) ٨	جـ) ١

٣)

نهـــــا ق(س) = ١٠ ومنه نهـــــا ق(س)^{٣} = (١٠)^{٣} = ١٠٠٠
س ← -٢ س ← -٢

٤)

م = ١

٥)

أ) نهـــــا ق(س) = (٥ - (١)^{٢}) = ٤
س ← ١

ب) نهـــــا ق(س) = ٤(-٢) + ١ = -٧
س ← -٢

جـ) لأن س=٠ هي القيمة التي يتشعب عندها الاقتران، فنجد النهاية من اليمين واليسار.

نهـــــا ق(س) = ٥، نهـــــا ق(س) = ١، لذا؛ نهـــــا ق (س) غير موجودة.
س ← ٠+ س ← ٠- س ← ٠

٦)

أ) نهـــــا هـ(س) = (٥)^{٢} +١ = ٢٦
س ← ٥

ب) نهـــــا هـ(س) = (٣)^{٢} +١ = ١٠
س ← ٣

جـ) هـ(٣)= ٨

٧)

أ = ١٦

٨)

أ) نهـــــا ق(س) = (٠)^{٢} + ١ = ٠ + ١ = ١
س ← ٠

ب).بما أن س=٢ هي القيمة التي يتشعب عندها الاقتران، فإننا نجد النهاية من اليمين واليسار:

نهـــــا ق(س) = ٥×٢ = ١٠، نهـــــا ق(س) = (٢)^{٢} + ١ = ٥
س ← ٢+ س ← ٢-

∴ نهـــــا ق(س) غير موجودة.
س ← ٢

جـ) نهـــــا ق(س) = ٥×٤ = ٢٠
س ← ٤

د).بما أن س=٦ هي القيمة التي يتشعب عندها الاقتران، فإننا نجد النهاية من اليمين واليسار:

نهـــــا ق(س) = (٦)^{٢} − ٦ =٣٠ ، نهـــــا ق(س) = ٥×٦ = ٣٠
س ← ٦+ س ← ٦-

ومنه: نهـــــا ق(س) = ٣٠
س ← ٦

٩) .بما أن نهـــــا ق(س) موجودة، فإن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار. وعليه، فإن أ = −٤
س ← ٢

ثالثًا: نهاية خارج قسمة اقترانين. | **عدد الحصص:** ثلاث حصص.

النتاجات

- يتعرف نظرية نهاية خارج قسمة اقترانين في حساب النهايات.
- يستخدم نظرية نهاية خارج قسمة اقترانين في حساب النهايات.
- يحسب نهاية خارج قسمة اقترانين عندما لا تكون نهاية المقام صفرًا.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

خارج قسمة اقترانين، اقتران نسبي، اقتران كسري، نهاية حاصل قسمة اقترانين، قيمة غير معينة (غير معرَّفة)، مرافق المقدار: $\sqrt{س + أ} + \sqrt{ص}$.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصفوف (٨-١١)، خصائص منحنيات الاقترانات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٣٣-٤٠).

التعلم القبلي

الاقتران النسبي ومجاله، الاقتران الكسري ومجاله، تحليل العبارة التربيعية، تحليل الفرق بين مربعين، تحليل مجموع مكعبين، تحليل الفرق بين مكعبين، التحليل بإخراج العامل المشترك.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (أوراق العمل، الأسئلة والأجوبة، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في الاقتران النسبي ومجاله، والاقتران الكسري ومجاله، وتحليل المقادير الجبرية والضرب في مرافق الجذر التربيعي.

٢- توزيع ورقة العمل (١-٥) على الطلبة لحلها ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم، وذلك لاستنتاج الجزء الأول من النظرية الوارد ذكرها في صفحة (٣٣).

٣- كتابة النظرية التي تتحدث عن نهاية حاصل قسمة اقترانين، وتوضيح الجزء الأول والجزء الثاني منها، وشروط تطبيقها.

٤- مناقشة الطلبة في المثال (١)، والمثال (٢) بوصفهما تطبيقًا على النظرية، والتركيز على مناقشة الحالات الثلاث لناتج التعويض لقيمة س في الاقتران، وهي:

$$\frac{\text{عدد} \neq \text{صفرًا}}{\text{عدد} \neq \text{صفرًا}} \quad ، \quad \frac{\text{صفر}}{\text{عدد} \neq \text{صفرًا}} \quad ، \quad \frac{\text{عدد} \neq \text{صفرًا}}{\text{صفر}}$$

٥- تكليف الطلبة حل التدريب (١)، ثم مناقشتهم في الإجابات.

٦- تقسيم الطلبة إلى مجموعات، ثم توزيع ورقة العمل (١- ٦) عليهم لمناقشة الحالة الرابعة: "عندما يكون ناتج التعويض في الاقتران صفرًا لكل من البسط والمقام" (من المهم هنا أن يوضح المعلم للطلبة أن هذه القيمة غير مُعيَّنة؛ أي إنها لا تساوي عددًا مُعيَّنًا)، وبيان أنه يمكن التعبير عن الاقتران في هذه الحالة بصورة مكافئة له باستخدام طرائق أخرى.

٧- مناقشة إجابات الطلبة، وتعزيز الصحيح منها، ثم ذكر طرائق مختلفة للتخلص من هذه الحالة، مثل: التحليل إلى العوامل، والضرب في مرافق الجذر التربيعي، وتوحيد المقامات.

٨- مناقشة الطلبة في الأمثلة (٣ -٦) التي توضح هذه الطرائق.

٩- الطلب إلى الطلبة حل التدريبات (٢-٥)، ثم مناقشتهم في الإجابات (يمكن تكليف الطلبة حل بعض التدريبات في البيت، ثم مناقشتهم في الإجابات في الحصة القادمة).

١٠- تكليف الطلبة حل الأسئلة في الصفحة (٣٩)، والصفحة (٤٠) في البيت، ثم مناقشتهم في الإجابات في الحصة القادمة.

١١- ختم الدرس باستخدام أداة التقويم (سجل وصف سير التعلم).

معلومات إضافية

- إن عدم وجود $\lim_{س \to أ}$ ق(س)، أو $\lim_{س \to أ}$ هـ(س)

لا يعني عدم وجود نهاية لخارج قسمة الاقترانين $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، وإنما يعني عدم إمكانية تطبيق النظرية في هذه الحالة؛ فقد تكون النهاية لخارج قسمة الاقترانين عند العدد أ موجودة بالرغم من عدم وجود نهاية أحد الاقترانين أو كليهما عند هذا العدد. وفي هذه الحالة، فإننا نكتب قاعدة الاقتران الجديد، ثم نبحث في نهايته.

- الاقتران الكسري هو اقتران يكتب في صورة $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، وإذا كان كل من ق(س)، هـ(س) كثير حدود فيسمى اقترانًا نسبيًّا.

ومجال الاقتران الكسري هو (مجال ق ∩ مجال هـ - { أصفار هـ(س) }).

وعليه، فإن مجال الاقتران: ع (س)= $\frac{٢س-٦}{س^{٢}-٩}$ هو:

ح – {– ٣ ، ٣}.

– عند تحليل العبارة (س^{٢}–٤)= (س–٢)(س+٢)، يسمى المقدار (س–٢) مرافقًا تربيعيًّا للمقدار (س+٢)، ويسمى المقدار (س+٢) مرافقًا تربيعيًّا للمقدار (س–٢).

وعند تحليل العبارة (س^{٣}–٨)= (س–٢)(س^{٢}+٢س + ٤)، يسمى المقدار (س^{٢}+٢س + ٤) مرافقًا تكعيبيًّا للمقدار (س–٢).

أخطاء شائعة

– قد يحسب بعض الطلبة نهاية الاقترانات الكسرية عن طريق توحيد المقام، ثم الضرب في المرافق التربيعي من دون التأكد أن ناتج التعويض المباشر يعطي صفرًا لكل من البسط والمقام.

– يخطئ بعض الطلبة في الإجراءات عند الضرب في المرافق، أو توحيد المقامات.

الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ق(س) =س^{٣}+ ٢س^{٢}– ٣س+ ٥، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) نهـــا ق(س) $_{س \leftarrow ٠}$

ب) نهـــا ق(س) $_{س \leftarrow ٢}$

جـ) نهـــا ق(س) $_{س \leftarrow -١}$

٢) إذا كان ق(س) =٣س^{٢} – ٥، هـ(س) = س + ٣، فجد قيمة كل مما يأتي:

أ) نهـــا ق(س) $_{س \leftarrow ٢}$

ب) نهـــا هـ(س) $_{س \leftarrow ٢}$

جـ) نهـــا $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$. $_{س \leftarrow ٢}$

د) نهـــا $\frac{هـ(س)}{ق(س)}$. $_{س \leftarrow ٢}$

إثراء

١) إذا كانت نهـــا $\frac{٢ق(س)+٣}{٥س+٢}$ = ٥، فجد نهـــا ق(س). $_{س \leftarrow ١}$ $_{س \leftarrow ١}$

٢) إذا كان ق(س) = س^{٣} − ٢س^{٢} + ٣س − ٦، هـ(س) = س − ٢، فجد:

أ) قاعدة الاقتران ل(س) = $\frac{\text{ق(س)}}{\text{هـ(س)}}$.

ب) $\lim_{\text{س} \to ٢}$ ل(س).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء . أداة التقويم: قائمة الرصد (١−٣).

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات. أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١−٦).

إجابات الأسئلة

١) أ) $\frac{١}{٣}$ ب) غير موجودة.

٢) أ) $\frac{١}{٨}$ ب) غير موجودة.

جـ) $\frac{-٥}{٣}$ بالتحليل إلى العوامل. د) ٣ بالتحليل إلى العوامل.

هـ) $\frac{-١}{٥٠}$ بتوحيد المقامات في البسط. و) $\frac{١}{٦}$

ز) −٦

٣) ق(س) = س ، ق^{٢}(س) = س^{٢} ، ق(٩) = ٩

$$\lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{ق}^{٢}(\text{س}) - \text{ق}(٩)}{\text{س} + ٣} = \lim_{\text{س} \to -٣} \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س} + ٣} = \lim_{\text{س} \to -٣} (\text{س} - ٣) = -٦$$

٤) $$\frac{٢\lim_{\text{س} \to ٥} \text{ق}(\text{س}) - ٣\lim_{\text{س} \to ٥} \text{هـ}(\text{س})}{\lim_{\text{س} \to ٥} \text{ق}(\text{س}) + \lim_{\text{س} \to ٥} (\text{س}+٧)} = \frac{٢ \times ٣ - ٧- \times ٢}{(٥ + ٧) + ٧-} = -٤$$

٥) ق(س)= $\frac{١}{(س - ٢)}$

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{\frac{١}{س+هـ-٢} - \frac{١}{س-٢}}{هـ} =$$

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{س-٢ - (س+هـ-٢)}{(س+هـ-٢)(س-٢)} \times \frac{١}{هـ} =$$

$$\text{نهـا}_{هـ \to ٠} \frac{-هـ}{(س+هـ-٢)(س-٢)} \times \frac{١}{هـ} =$$

$$\frac{-١}{(س+٠-٢)(س-٢)} = \frac{-١}{(س-٢)^{٢}}$$

٦) $\text{نهـا}_{س \to ١} \frac{س^{٢}+س-٢}{س^{٢}-١} = \frac{٣}{٢}$ بالتحليل إلى العوامل.

رابعًا: **نهاية اقتران الجذر النوني.**

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

– يحسب نهاية الجذر النوني للاقتران ق(س) عندما س← أ ، حيث ن ∋ ط (إن وُجِدت).

– يستنتج متى تكون نهاية الجذر النوني للاقتران ق(س) عندما س← أ موجودة، ومتى تكون غير موجودة.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

الجذر النوني للاقتران ق(س): $\sqrt[ن]{\text{ق(س)}}$.

التكامل الرأسي

– كتـاب الرياضيـات، الصفـوف (٨–١١)، خصائص منحنيات الاقترانات.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (٤١–٤٥).

التعلم القبلي

الجذر التربيعي، الجذر التكعيبي، الجذر النوني، مجال الجذر النوني للاقتران.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (فكر– انتقِ زميلًا – شارك، التعلم التعاوني الجماعي).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في ما يعرفونه عن الجذر التربيعي، والجذر التكعيبي، والجذر النوني، ومجال جذر الاقتران التربيعي، ومجال جذر الاقتران التكعيبي، ومجال جذر الاقتران النوني.

٢– كتابة النظرية الخاصة بنهاية الجذر النوني للاقتران ق(س) عندما س ← أ، وتوضيح شروط تطبيقها.

٣– مناقشة الطلبة في المثالين (١)، و(٢) بوصفهما تطبيقًا على النظرية.

٤– الطلب إلى الطلبة حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٥– مناقشة الطلبة في حالة الجذر النوني عندما ن = عددًا زوجيًّا لمساعدتهم على استنتاج القاعدة في الصفحة (٤٣)، ثم مناقشة الطلبة في المثال (٣) بوصفه تطبيقًا على القاعدة.

٦- الطلب إلى الطلبة حل التدريب (٢)، ثم مناقشتهم في الإجابات (يمكن تكليف الطلبة حل بعض التدريبات في البيت، ثم مناقشتهم في الإجابات في الحصة القادمة).

٧- تكليف الطلبة حل بعض الأسئلة في الصفحة (٤٥) في البيت، ثم مناقشتهم في الإجابات في الحصة القادمة، وحل بقية الأسئلة ضمن مجموعات ثنائية.

٨- ختم الدرس بسؤال الطلبة: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة في إيجاد $\lim_{س \to أ} \sqrt[ن]{ق(س)}$ عند أصفار الاقتران ق(س)، فيعتقدون أنها تكون دائمًا غير موجودة، ويخطئ بعض آخر في اعتقاد أنها دائمًا موجودة. وضِّح لهم الحالات المختلفة، وناقشهم في أمثلة كافية على كل حالة.

الفروق الفردية

علاج

- جد قيمة كل مما يأتي:

١) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س - ٤}$

٢) $\lim_{س \to ٤} \sqrt[٣]{س - ٤}$

٣) $\lim_{س \to ٤} \sqrt[٤]{(س-٤)^{٢}}$

إثراء

- جد قيمة:

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س + ٢} - ٢}$$

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل.	أداة التقويم: سلم التقدير (١- ٤).
استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.	أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١-٦).

إجابات الأسئلة

١)

أ) -٤ ب) غير موجودة.

جـ) ١٧ د) -٤

٢)

أ) صفر. ب) ٢٣

جـ) صفر.

د) نبحث في إشارة المقدار تحت الجذر (٤ - س^{٢})، فنجد أن:

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢^{-}} \sqrt[٤]{٤ - س^{٢}} = ٠$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢^{+}} \sqrt[٤]{٤ - س^{٢}} \text{ غير موجودة.}$$

$$\therefore \text{نهـــا}_{س \to ٢} \sqrt[٤]{٤ - س^{٢}} \text{ غير موجودة.}$$

أولًا: **الاتصال عند نقطة.** | **عدد الحصص:** حصتان.

النتاجات

– يفسر مفهوم الاتصال عند نقطة ما هندسيًّا.

– يبحث اتصال اقتران كثير حدود متشعب نسبي عند نقطة ما.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

اقتران متصل، اقتران غير متصل، نقط عدم اتصال.

التكامل الرأسي

– كتاب الرياضيات، الصفوف (٨–١١)، خصائص منحنيات الاقترانات.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (٤٦–٥٤).

التعلم القبلي

نهاية اقتران عند نقطة ما، أنظمة المعادلات.

استراتيجيات التدريس

التعلم في مجموعات (فكر– انتقِ زميلًا– شارك، التعلم التعاوني الجماعي)، التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، التدريبات والتمارين)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بتوزيع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم الطلب إليهم تأمل الشكل (١ – ١٤) في الصفحة (٤٦)، ثم الإجابة عن الأسئلة الآتية:

- ماذا تلاحظ على منحنيات الاقترانات: ق، هـ، ل، م؟
- اذكر خصائص كل اقتران عندما س = ٢ من حيث نهاية الاقتران عند تلك النقطة، وقيمة الاقتران عندها.
- ما الذي ميَّز الاقتران ع(س) عن بقية الاقترانات في الشكل من حيث تلك الخصائص؟ ماذا تستنتج؟

٢ – كتابة تعريف الاقتران المتصل عند نقطة ما، ثم مناقشة الطلبة في شروط الاتصال عند نقطة ما.

٣– استخدام استراتيجية (فكر – انتقِ زميلًا – شارك) بالطلب إلى الطلبة البحث في اتصال الاقتران كثير الحدود عندما س = أ ، حيث أ عدد حقيقي.

٤– مناقشة الطلبة في الأمثلة (١–٥)، ثم تبرير كل خطوة من خطوات الحل.

٥- تكليف الطلبة حل التدريبين (١)، و (٢)، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٦- تكليف الطلبة حل الأسئلة في الصفحتين (٥٣)، و(٥٤) في البيت، ثم مناقشتهم في الإجابات في الحصة القادمة.
٧- ختم الدرس بسؤال الطلبة: ما شروط اتصال اقتران عند نقطة؟

الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ق(س) متصلًا عندما س = ٥، وكانت $\lim_{س \to ٥}$ ق(س) = ٣، فجد ق(٥).

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{س + ٣}{س^{٢} - ٩} & ،س \neq -٣، س \neq ٣ \\ م & ،س = -٣ \end{cases}$:

أ) هل ق(س) متصل عندما س = ٣ ؟ لماذا؟

ب) إذا كان ق(س) متصلًا عندما س = -٣، فما قيمة م؟

إثراء

- أجرة إيقاف السيارة في أحد مواقف السيارات هي دينار واحد عن الساعة الأولى، أو أي جزء منها، يضاف إليها نصف دينار عن كل ساعة لاحقة، أو أي جزء منها:

١) ما الأجرة التي يدفعها سائق أوقف سيارته في الموقف مدة ٣ ساعات؟

٢) كم سيدفع إذا زادت المدة دقيقة واحدة على الساعات الثلاث؟

٣) هل اقتران الأجرة بدلالة مدة التوقف متصل؟

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة.	أداة التقويم: قائمة الرصد (١-٥)، البند (١).
استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.	أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١-٦).

إجابات الأسئلة

١) ق(س) غير متصل عندما س = ١ ، س= ٣

٢) ق(س) غير متصل عندما س = ١؛ لأن نهـــــا ق(س) غير موجودة.
س ← ١

٣) هـ (س) غير متصل عندما س = ١؛ لأن هـ(١) ≠ نهـــــا هـ(س).
س ← ١

٤) أ) ق(س) متصل عندما س =١؛لأن ق(١) =٤= نهـــــا ق(س).
س ← ١

ب) ق(س) غير متصل عندما س = −١؛ لأن نهـــــا ق(س) غير موجودة.
س ← −١

٥) ق(س) متصل عندما س = ٣ ⟸ ق(٣) =نهـــــا ق(س)
س ← ٣

٣م + ٢ = −١ ⟸ م = −١

٦) هـ (س) متصل عندما س = ٢

نهـــــا هـ(س) = هـ (٢) = نهـــــا هـ(س)
س ← ٢⁻ س ← ٢⁺

٢ + أ = ٨ ⟸ أ = ٦

٢ب +٦ = ٨ ⟸ ب = ١

٧) ل (س) متصل عندما س = ١

⟸ نهـــــا ل (س) = ل (١) = نهـــــا ل(س)
س ← ١⁻ س ← ١⁺

أ − ب = ٤ ..... (١)

أ + ب + ٢ = ٤ ⟸ أ + ب = ٢ ..... (٢)

بحل المعادلتين (١)، (٢) ينتج أن أ = ٣، ب = −١

٨) نهـــــا (٢ق(س) + س) = ٦
س ← ٢

نهـــــا ٢ق(س) + ٢ = ٦ ⟸ نهـــــا ق(٢) = ٢
س ← ٢ س ← ٢

وبما أن الاقتران (ق) متصل عندما س=٢، فإن ق(٢) = ٢

ثانيًا: نظريات الاتصال. | **عدد الحصص:** حصتان.

النتاجات

– يطبق نظريات الاتصال في بحث الاتصال عند نقطة لمجموع اقترانين، أو الفرق بينهما، أو حاصل ضربهما.
– يحدد نقاط عدم الاتصال لاقترانات نسبية.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

نظريات الاتصال.

التكامل الرأسي

– كتاب الرياضيات، الصفوف (٨–١١)، خصائص منحنيات الاقترانات.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (٥٥–٦٢).

التعلم القبلي

الاتصال عند نقطة.

استراتيجيات التدريس

التعلم في مجموعات (فكر – انتقِ زميلًا – شارك)، التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، التدريبات والتمارين)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بتوزيع الطلبة إلى مجموعات ثنائية، ثم الطلب إليهم حل أسئلة ورقة العمل (١–٧)، ثم الإفادة من النتائج التي توصلوا إليها في تعرُّف نظريات الاتصال.
٢– مناقشة الطلبة في نص نظريات الاتصال، وتفسير دلالاتها.
٣– مناقشة الطلبة في المثال (١) بوصفه تطبيقًا مباشرًا على نظريات الاتصال.
٤– تكليف الطلبة حل التدريب (١)، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٥– لفت انتباه الطلبة إلى أن شروط النظرية لتحقيق اتصال الاقتران ل(س) الناتج عن مجموع اقترانين، أو الفرق بينهما، أو حاصل ضربهما، أو خارج قسمتهما، هي اتصال كلا الاقترانين عند النقطة، وأن عدم تحقق الشروط (في حال عدم اتصال أحدهما أو كليهما عند النقطة) لا يعني أن الاقتران ل(س) غير متصل. وفي هذه الحالة، يجب إيجاد قاعدة ل(س) أولًا، ثم البحث في اتصاله عند النقطة.

٦- توجيه الطلبة إلى حل النشاط صفحة في (٥٧) ضمن مجموعات ثنائية.
٧- مناقشة الطلبة في المثال (٢)، ثم تكليفهم حل التدريب (٢)، ثم مناقشتهم في الإجابات.
٨- مناقشة الطلبة في نص النتيجة المتعلق باتصال الاقتران النسبي على مجاله (أي على جميع قيم س باستثناء قيمة س التي تكون صفرًا من أصفار المقام)، ثم مناقشتهم في المثال (٣).
٩- تكليف الطلبة حل التدريب (٣) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٠- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض الأسئلة في الصفحتين (٥٣)، و(٥٤)، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١١- ختم الدرس بسؤال الطلبة: ما الشرط الرئيس الذي يجب توافره لتطبيق نظريات الاتصال؟

أخطاء شائعة

قد يظن بعض الطلبة أنه إذا كان أحد الاقترانين ق، هـ أو كلاهما غير متصل عندما س = أ، فإن مجموعهما، والفرق بينهما، وحاصل ضربهما، وخارج قسمتهما يكون غير متصل عندما س = أ؛ لذا نبِّههم أن هذا الأمر يعني عدم إمكانية تطبيق النظرية التي وردت في الدرس للحكم على اتصال المجموع، والفرق، وحاصل الضرب، وخارج القسمة؛ فقد تكون هذه الاقترانات (جميعها أو بعضها) متصلة، ولا نستطيع الحكم على ذلك إلا بعد إيجاد قاعدة الاقتران الجديد، ثم البحث في اتصاله.

الفروق الفردية

علاج

- إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س \leq ٢ \\ ٥س & ، س > ٢ \end{cases}$ ، هـ(س) = $\begin{cases} ١٠ & ، س \leq ٢ \\ س + ٢ & ، س > ٢ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال م(س) = ق(س) + هـ(س) عندما س = ٢

إثراء

- إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س \leq ٢ \\ ٥س & ، س > ٢ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال م(س) = ق^{٢}(س) +٣س، عندما س = ٢

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة.	أداة التقويم: قائمة الرصد (١-٥)، البند (٢).
استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.	أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١-٦).
استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.	أداة التقويم: اختبار نهاية الوحدة.

إجابات الأسئلة

١) ق (س) متصل عندما س = ٢؛ لأنه كثير حدود ..... (١)

نبحث في اتصال هـ (س) عندما س = ٢، ونجد أن هـ (س) متصل عندما س = ٢؛ لأن

هـ (٢) = $\lim_{س \to ٢}$ هـ (٢) = ١١ ..... (٢)

من (١)، (٢) ل(س) متصل عندما س = ٢

٢) ق (س) متصل عندما س = ٠؛ لأنه كثير حدود.

نبحث في اتصال هـ (س) عندما س = ٠، فنجد أنه متصل عندما س = ٠؛ لأن

هـ (٠) = $\lim_{س \to ٠}$ هـ (س) = ٤

وعليه، فإن ل(س) متصل عندما س = ٠

٣) ق(س) متصل عندما س=٣؛ لأنه كثير حدود.

هـ(س) غير متصل عندما س= ٣؛ لأن $\lim_{س \to ٣}$ هـ (س) غير موجودة.

لا نستطيع تطبيق نظريات الاتصال، فنجد قاعدة ل(س):

$$ل(س) = \begin{cases} س^{٣} - ٩س & ، \ س < ٣ \\ ٠ & ، \ س = ٣ \\ -س^{٣} + ٩س & ، \ س > ٣ \end{cases}$$

، ومنها ل(س) متصل عندما س= ٣؛ لأن $\lim_{س \to ٣}$ ل(س) = ل(٣) = ٠

٤) الاستنتاج غير صحيح، والتبرير بذكر مثال.

٥) أ) ق(س) كثير حدود؛ فهو متصل دائمًا، ولا توجد نقاط عدم اتصال.

ب) هـ(س) غير متصل عند أصفار المقام: $س^{٢} - ٥س + ٦$

$س^{٢} - ٥س + ٦ = ٠$

(س – ٢) (س – ٣) = ٠ ، س = ٢ ، س= ٣

هـ(س) غير متصل عندما س = ٢، ٣

جـ) ل(س) غير متصل عند أصفار المقام.

المقام الأول: $س^{٢} - ١ = ٠ \iff س^{٢} = ١ \iff س = ١، -١$

المقام الثاني: $س = ٠$

ومنه: ل(س) غير متصل عندما $س = ١ ، -١ ، ٠$

د) م(س) متصل على جميع قيم س، حيث $س < ٢$؛ لأنه في صورة كثير حدود.

م(س) متصل على جميع قيم س، حيث $س > ٢$؛ لأنه في صورة كثير حدود.

نبحث في اتصال م (س) عندما $س = ٢$ (نقطة التشعب):

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢^{-}} م(س) = ١١ \neq \text{نهـــا}_{س \to ٢^{+}} م(س) = ٤$$

$$\text{نهـــا}_{س \to ٢} م(س) \text{ غير موجودة،}$$

ومنه: م (س) غير متصل عندما $س = ٢$

إجابات أسئلة الوحدة

١) أ) −١,٥ ب) ٢

جـ) غير موجودة. د) ق غير متصل عندما س = ٢

هـ) $\lim_{س \to ٠}$ (ق (س))^{٢} + $\lim_{س \to ٠}$ (−س + ٢)

$= (\frac{١}{٢})^{٢} + (٠ + ٢) = \frac{١}{٤} + ٢ = ٢\frac{١}{٤}$

٢) $\lim_{س \to ١}$ ق (س) $= \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$ ، ومنه:

أ) −٢ ب) −٩

٣) أ = ٥ ، ب= −٣

٤) أ) ٢

ب) $\frac{٥}{٢}$ (تحليل إلى العوامل، ثم تعويض)

جـ) $\lim_{س \to ١}$ ل (س) = $\lim_{س \to ١}$ $\frac{١-٢+١}{٣-١٢} = \frac{٠}{٩} = ٠$ (تعويض في النهاية مباشرة)

د) ٢٧ (تحليل فرق المكعبين ثم تعويض)

هـ) $\frac{-١}{٨}$ (توحيد مقامات)

و) $\frac{٣}{١٤٠}$ (الضرب في المرافق)

٥) ق(س) متصل عندما س = ١ (كثير حدود)

هـ(س) متصل عندما س = ١؛ لأن $\lim_{س \to ١+}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١-}$ هـ(س) = هـ(١) = ٩

ومنه: ل(س) متصل عندما س = ١؛ لأنه ناتج جمع اقترانين متصلين.

٦) ق(٣) = ٤، $\lim_{س \to ٣}$ ق (س) = ٢، ومنه: ق(س) غير متصل عندما س = ٣

٧) بما أن ق، هـ متصلان عندما س = ٥

∴ هـ(٥) = $\lim_{س \to ٥}$ هـ (س) = ٤، ويكون ق(٥) = $\lim_{س \to ٥}$ ق (س)

$$\frac{\lim_{س \to ٥} \text{ق(س)} + \lim_{س \to ٥} \text{س}}{\lim_{س \to ٥} ٣\text{هـ(س)}} = ١ \Longleftarrow \text{ق}(٥) = ٧$$

٨) نجد أصفار المقام:

س = ٠

س^{٢} − ٣ س = ٠ $\Longleftarrow$ س = ٠ ، ٣

ق(س) غير متصل عندما س = ٠ ، ٣

٩)

الفقرة	١	٢	٣	٤	٥
رمز الإجابة	جـ	ب	جـ	د	أ

ورقة العمل (١ – ١)

إذا كان ق(س) = ٢س + ١:

١) أكمل الجدول الآتي:

س	٤	٣	٢,٥	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١	٢	١,٩٩٩	١,٩٩	١,٩	١,٥	١	٠
ق(س)													

٢) ماذا تلاحظ؟

٣) ما القيمة التي يقترب منها الاقتران ق عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليمين (س > ٢)؟

٤) ما القيمة التي يقترب منها الاقتران ق عندما تقترب س من العدد ٢ من جهة اليسار (س< ٢)؟

٥) مثِّل الاقتران ق بيانيًّا باستخدام برمجيات رسم المنحنيات، ثم جد القيمة التي يقترب منها ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٢

ورقة العمل (١ – ٢)

إذا كان ق(س) = ٧

١) أكمل الجدول الآتي:

س	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢,٥	٢	١	٠	١−	٢−	٢,٥−
ق(س)													

٢) ماذا تلاحظ ؟

٣) جد ناتج كل مما يأتي:

أ) نهـــــا ق(س).
س ← ٢

ب) نهـــــا ق(س).
س ← −١

جـ) نهـــــا ق(س).
س ← ٢,٥

د) نهـــــا ق(س).
س ← ٠

هـ) نهـــــا ق(س).
س ← ٧

و) نهـــــا ق(س).
س ← ٥٠

ز) نهـــــا ق(س).
س ← −١٠٠

ح) نهـــــا ق(س).
س ← أ

- ماذا تستنتج؟
- عبِّر عن ذلك بالكلمات.

٤) مثِّل الاقتران ق بيانيًّا باستخدام برمجيات رسم المنحنيات، ثم جد القيمة التي يقترب منها ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٢، والعدد −١، والعدد ٢,٥، والعدد ٠، ثم قارن الإجابة بالنتائج التي توصلت إليها في الفرع (٣).

ورقة العمل (١ – ٣)

إذا كان ق(س) = س:

١) أكمل الجدول الآتي:

س	٨	٧,١	٦	٥	٤,٥	٣	٢,٥	٢	١	٠	١−	٢−	٢,٥−
ق(س)													

٢) ماذا تلاحظ؟

٣) جد ناتج كل مما يأتي:

أ) نهـــــا ق(س).
س ← ٢

ب) نهـــــا ق(س).
س ← ١−

جـ) نهـــــا ق(س).
س ← ٢,٥

د) نهـــــا ق(س).
س ← ٠

هـ) نهـــــا ق(س).
س ← ٧

و) نهـــــا ق(س).
س ← ٥٠

ز) نهـــــا ق(س).
س ← ١٠٠−

ح) نهـــــا ق(س).
س ← أ

- ماذا تستنتج؟
- عبِّر عن ذلك بالكلمات والرموز.

٤) مثِّل الاقتران ق بيانيًّا باستخدام برمجيات رسم المنحنيات، ثم جد القيمة التي يقترب منها ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ٢، والعدد ١−، والعدد ٢,٥، والعدد ٠، ثم قارن الإجابة بالنتائج التي توصلت إليها في الفرع (٣).

ورقة العمل (١ – ٤)

إذا كان ق(س) = س ، هـ (س) = ٥، فجد ناتج كل مما يأتي:

١) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س).

٢) $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س).

٣) قاعدة ق(س) + هـ(س).

٤) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) + هـ(س)).

٥) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) + $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س).

• قارن بين النتيجتين في الفرعين (٤)، و (٥). ماذا تستنتج؟

٦) قاعدة ق(س) – هـ (س).

٧) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) – هـ(س)).

٨) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) – $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س).

• قارن بين النتيجتين في الفرعين (٧)، و (٨). ماذا تستنتج؟

٩) قاعدة ق(س) × هـ (س).

١٠) $\lim_{س \to ٢}$ (ق(س) × هـ(س)).

١١) $\lim_{س \to ٢}$ ق(س) × $\lim_{س \to ٢}$ هـ(س).

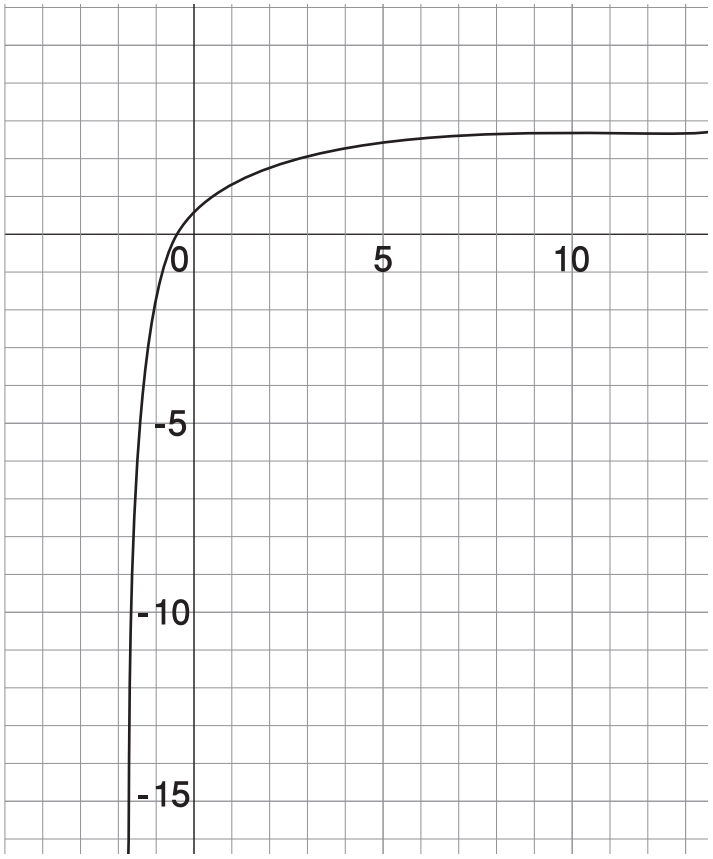
• قارن بين النتيجتين في الفرعين (١٠)، و (١١). ماذا تستنتج؟

ورقة العمل (١ – ٥)

إذا كان ق(س)= $\frac{٣س+١}{س+٢}$:

١) أكمل الجدول الآتي:

س	٧	٦	٥	٤	٣	٢,٥	٢	١	٠	١−	٢−	٢,٥−
ق(س)												



الشكل (١−١).

٢) جد ناتج كل مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٣}$ (٣س +١).

ب) $\lim_{س \to ٣}$ (س +٢).

جـ) $\frac{\lim_{س \to ٣} (٣س+١)}{\lim_{س \to ٣} (س+٢)}$.

د) اعتمادًا على الشكل (١−١)، جد $\lim_{س \to ٣} \frac{٣س+١}{س+٢}$.

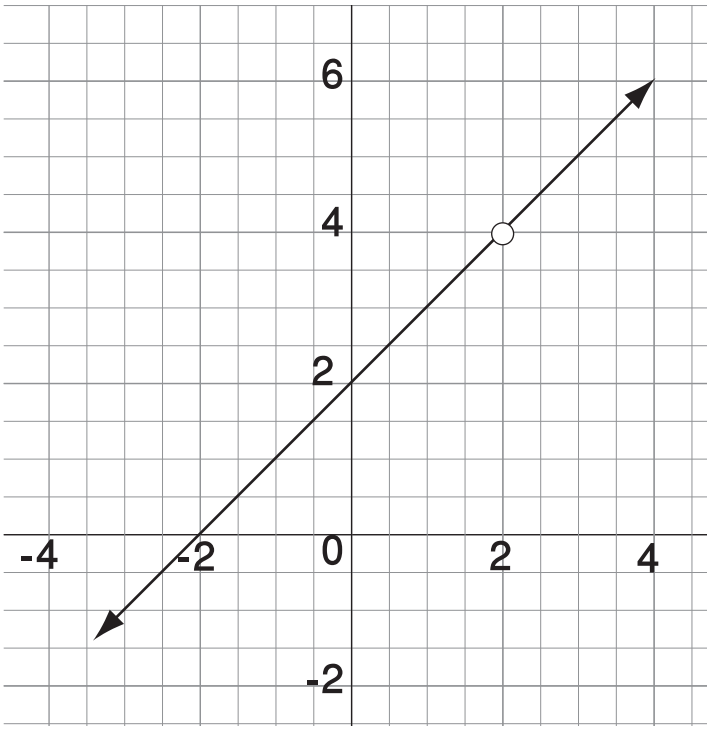
هـ) ما العلاقة بين الفرع (جـ) والفرع (د)؟

و) ماذا تستنتج؟

إذا كان ق(س)= $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$:

١) أكمل الجدول الآتي:

س	٣	٢,٥	٢,١	٢,٠١	٢,٠٠١		١,٩٩٩٩	١,٩٩	١,٩	١,٥	١	٠
ق(س)												



الشكل (١–٢).

٢) جد كلًّا مما يأتي:

أ) $\lim_{س \to ٣}$ (س^{٢} – ٤).

$\lim_{س \to ٢}$ (س – ٢).

ب) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$.

جـ) اعتمادًا على الشكل(١–٢)، جد $\lim_{س \to ٢^{+}} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$.

د) اعتمادًا على الشكل (١–٢)، جد $\lim_{س \to ٢^{-}} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$.

هـ) ماذا تلاحظ؟

و) اكتب صيغة جبرية مكافئة للصيغة $\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$.

ز) جد $\lim_{س \to ٢}$ (س +٢).

ح) قارن بين إجابات الفروع (جـ)، و(د)، و(ز). ماذا تستنتج؟

إذا كان ق(س) = ٣ س +٢ ، هـ(س) = س^{٢} ،
فأجب عمّا يأتي:

١) ابحث في اتصال كل من الاقترانين ق، هـ عندما س = ٢

٢) جد قاعدة الاقتران $\left(ق(س) + هـ(س)\right)$ ، ثم ابحث في اتصاله عندما س = ٢

٣) جد قاعد الاقتران $\left(ق(س) - هـ(س)\right)$ ، ثم ابحث في اتصاله عندما س = ٢

٤) جد قاعدة الاقتران $\left(ق(س) \times هـ(س)\right)$ ، ثم ابحث في اتصاله عندما س = ٢

٥) جد قاعدة الاقتران $\frac{ق(س)}{هـ(س)}$ ، حيث هـ(س) ≠ ٠ ، ثم ابحث في اتصاله عندما س = ٢

- ماذا تستنتج؟
- عبِّر عن ذلك بالكلمات.

استراتيجية التقويم: الملاحظة.

أداة التقويم: قائمة الرصد (١ – ١).

مفهوم النهاية

الرقم	اسم الطالب	يجد قيمة الاقتران عند نقطة معلومة.	يجد قيمة النهاية للاقتران عندما تقترب س من عدد من جهة اليمين (إن وُجدت).	يجد قيمة النهاية للاقتران عندما تقترب س من عدد من جهة اليسار (إن وُجدت).	يجد قيمة النهاية للاقتران عند نقطة حسابيًّا (إن وُجدت).	يجد قيمة النهاية للاقتران عند نقطة بيانيًّا.	المجموع

- نعم: إذا أتقن الطالب المهمة.
- لا: إذا لم يتقن الطالب المهمة.

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (١ – ٢).

نظريات النهايات

الرقم	مؤشر الأداء	ممتاز	متوسط	ضعيف
١	يحسب النهاية عند نقطة لاقتران كثير حدود.			
٢	يحسب النهاية عند نقطة لاقتران متشعب.			
٣	يطبق نظريات النهايات في إيجاد النهاية عند نقطة.			
٤	يحدد النظرية أو النتيجة التي استخدمها في حساب النهاية.			
٥	يبرر كل خطوة من خطوات إيجاد النهاية.			

- ممتاز: إذا أنجز الطالب المهمة من دون أخطاء.
- متوسط: إذا أنجز الطالب المهمة بوجود خطأ بسيط.
- ضعيف: إذا أنجز الطالب المهمة بوجود أكثر من خطأ.

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: قائمة الرصد (١-٣).

نهاية خارج قسمة اقترانين.

الرقم	اسم الطالب	يجد نهاية خارج قسمة اقترانين بالتعويض المباشر.	يجد نهاية خارج قسمة اقترانين بالتحليل إلى العوامل.	يجد نهاية خارج قسمة اقترانين بالضرب في المرافق.	يجد نهاية خارج قسمة اقترانين بتبسيط الكسور.	يبرر كل خطوة من خطوات إيجاد النهاية.	المجموع

- نعم: إذا أتقن الطالب المهمة.
- لا: إذا لم يتقن الطالب المهمة.

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (١ – ٤).

اقتران الجذر النوني

الرقم	مؤشر الأداء	٤	٣	٢	١
١	يجد نهاية اقتران الجذر التربيعي، ونهاية اقتران الجذر التكعيبي بالتعويض المباشر.				
٢	يجد نهاية اقتران الجذر التربيعي بالضرب في المرافق.				
٣	يبرر كل خطوة من خطوات إيجاد النهاية.				

(٤) إذا أنجز الطالب المهمة بصورة صحيحة، من دون مساعدة.

(٣) إذا أنجز الطالب المهمة بصورة صحيحة، وبوجود مساعدة بسيطة.

(٢) إذا أنجز الطالب المهمة بوجود خطأ، مع حاجته إلى المساعدة، أو من دون حاجته إليها.

(١) إذا أنجز الطالب المهمة بوجود أخطاء، وبوجود مساعدة.

استراتيجية التقويم: الملاحظة.

أداة التقويم: قائمة الرصد (١ – ٥).

الاتصال

الرقم	مؤشر الأداء	يتقن	لا يتقن
	الاتصال عند نقطة		
١	يبحث الاتصال عند نقطة عن طريق الرسم البياني.		
٢	يبحث الاتصال عند نقطة لاقتران كثير حدود.		
٣	يبحث الاتصال عند نقطة لاقتران متشعب.		
٤	يبرّر كل خطوة من خطوات الحل.		
	نظريات الاتصال		
١	يبحث الاتصال عند نقطة في حالة جمع اقترانين.		
٢	يبحث الاتصال عند نقطة في حالة طرح اقترانين.		
٣	يبحث الاتصال عند نقطة في حالة ضرب اقترانين.		
٤	يبحث الاتصال عند نقطة في حالة قسمة اقترانين.		
٥	يبرر كل خطوة من خطوات الحل.		

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.

أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١ – ٦).

الاسم: ..... . الموضوع: ..... . التاريخ: ..... .

تعلمت اليوم: .....
.....
.....
.....
.....
.....

واجهت صعوبة في فهم: .....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

ملاحظات المعلِّم: .....
.....
.....
.....
.....
.....

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: اختبار نهاية الوحدة.

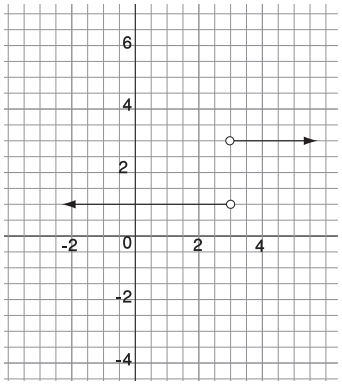
١) يتكون هذا السؤال من أربع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان كل من الاقتران ق والاقتران هـ متصلًا عندما س= ٢، وكان هـ(٢) = ١٠،

وكان $\lim_{س \to ٢} \frac{٣ق(س) + ٢س}{٥هـ(س)} = \frac{١}{٢}$، فإن ق(٢) يساوي:

أ) ٢ ب) ٥ جـ) ٧ د) ٦

(٢) اعتمادًا على الشكل (١-٣)، فإن $\lim_{س \to ٢}$ ق(س):



الشكل (١-٣).

أ) غير موجودة. ب) ٢

جـ) ١ د) ٣

(٣) إذا كان ق(س) $= \frac{(س - ١)}{(س - ٣)}$، فإن مجموعة قيم س التي يكون عندها ق(س) غير متصل هي:

أ) { ١ ، ٣ } ب) { ٣ } جـ) {-١ ، -٣} د) {-٣}

(٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{٣س^{٢} - ٦س}{س - ٢}$:

أ) ٠ ب) ٣ جـ) ٦ د) غير موجودة.

(٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٧ ، & س > ٠ \\ ٥ ، & س = ٠ \\ ٣ ، & س < ٠ \end{cases}$ ، فإن نهـــــا ق(س): $_{س \leftarrow ٠}$

أ) ٣ ب) ٥ جـ) ٧ د) غير موجودة.

٢) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} - ٤ ، & س \leq ٢ \\ أ س + ٣ ، & س > ٢ \end{cases}$ ، وكان ق متصلًا عندما س = ٢، فما قيمة الثابت أ ؟

٣) جد قيمة نهـــــا $_{س \leftarrow ٤}$ $\frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$.

٤) جد قيمة نهـــــا $_{س \leftarrow -٣}$ $\frac{س^{٣} + ٥س^{٢} + ٦}{س^{٢} - ٩}$.

٥) جد قيمة نهـــــا $_{س \leftarrow ١}$ $\frac{\frac{١}{س+١} - \frac{١}{٢س}}{س - ١}$.

الوحدة الثانية

التفاضل

الوحدة الثانية

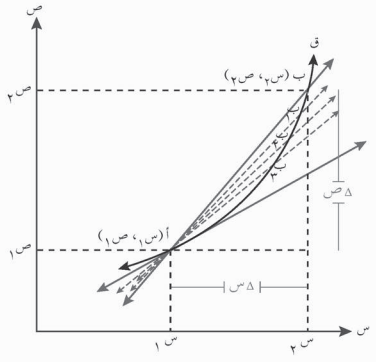
٢

التفاضل

Differentiation

نلاحظ في حياتنا وجود مقادير ثابتة وأخرى متغيرة، وقد تعرفت ظواهر متغيرة يؤدي التغير فيها إلى تغير في ظاهرة أخرى تعتمد عليها.

تتناول هذه الوحدة مفهوم معدل التغير هندسيًّا وفيزيائيًّا، وربطه بمشتقة الاقتران، فضلًا عن قواعد متنوعة في الاشتقاق لإيجاد مشتقات اقترانات مختلفة.



يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تفسير مفهوم معدل التغير هندسيًّا وفيزيائيًّا.
- تعريف المشتقة الأولى للاقتران.
- إيجاد مشتقة الاقتران باستخدام التعريف وقواعد الاشتقاق.
- استخدام قاعدة السلسلة في إيجاد المشتقة.
- إيجاد مشتقات الاقترانات: س^{ن}، جاس، جتاس، ظاس.
- إيجاد المشتقات العليا لاقترانات حتى المشتقة الثانية.

تهيئة

١) إذا كان ق(س)= ٢س− س^{٢}+١، فجد:

ق(٢)، ق(−١)، ق(٠)، ق(أ)، ق(١+أ)، ق(٢− أ).

٢) جد ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ المار بالنقطتين أ (−٣ ، −٥) ، ب (٠ ، ٤).

٣) جد ناتج ما يأتي:

أ) (٢ − س) (٣س+١).

ب) (٤ − س) (٤+ س).

جـ) (٣ −٢س)^{٢}.

د) ($\sqrt{س+١}$ − ٣)^{٢}.

هـ) $\frac{١}{٣-٢س}+\frac{١}{٥}$.

و) ($\sqrt{٢ - ص}$ +٤) ($\sqrt{٢ - ص}$ −٤).

ز) ($\sqrt{س+٥}$ −$\sqrt{٣}$) ($\sqrt{س+٥}$ +$\sqrt{٣}$).

٤) حلِّل المقادير الجبرية الآتية:

أ) س^{٢}− ٦٤

ب) س^{٣}+ ٦٤

جـ) س^{٢}− س − ٦

د) س^{٢}+ ٤س − ١٢

هـ) س^{٣}− ٢٧

و) س^{٢}+١٠س + ٢٤

٥) جد قيمة س في المقادير الآتية:

أ) س + ٣ = −٢س

ب) س^{٢}+١ = ٥

جـ) س^{٢} − ٥س = ٦

د) ٣س +١ = ٢س− ٦

إجابات أسئلة التهيئة

١) ق(٢)=١ ، ق(−١)= −٢ ، ق(٠)=١ ، ق(أ)=٢أ − أ^{٢}+١، ق(١+ أ) = −أ^{٢} + ٢ ،
ق(٢− أ)= −أ^{٢} + ٢أ +١

٢) ميل المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ = ٣

٣)

أ) −٣ س^{٢}+٥س+ ٢

ب) ١٦− س^{٢}

جـ) ٩−١٢س + ٤ س^{٢}

د) س+١٠−٦ $\sqrt{\text{س+١}}$

هـ) $\frac{٨ - ٢س}{٥(٣-٢س)}$

و) −ص − ١٤

ز) س+٢

٤)

أ) (س−٨)(س+ ٨).

ب) (س+٤)(س^{٢}−٤س+١٦).

جـ) (س−٣)(س+ ٢).

د) (س+ ٦)(س−٢).

هـ) (س−٣)(س^{٢}+٣س+٩).

و) (س+ ٦)(س+ ٤).

٥)

أ) س = −١

ب) س = ٢، س= −٢

جـ) س = ٦ ، س = −١

د) س = −٧

أولًا: معدل التغير.

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

- يتعرف معدل التغير.
- يحسب معدل التغير.
- يستخدم معدل التغير في حل مسائل حياتية.
- يفسر معدل التغير هندسيًّا وفيزيائيًّا.
- يحسب السرعة المتوسطة.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

التغير في س: Δس، التغير في ص: Δص، معدل تغير الاقتران: $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$، القاطع، ميل القاطع، السرعة المتوسطة: $\overline{ع}$.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف الحادي عشر، الاقترانات الحقيقية والاقترانات المتشعبة.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٦٨ – ٧٨).

التعلم القبلي

الاقترانات المتشعبة، قيمة الاقتران عند نقطة ما، ميل الخط المستقيم، قانون السرعة.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (فكر– انتقِ زميلًا – شارك)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بعرض الموقف الآتي:

انطلق أحمد بسيارته إلى العمل بسرعة ٨٠ كم/ الساعة، وفي الطريق توقف عند إشارة ضوئية مدة دقيقتين، ثم أكمل مسيره بسرعة ٩٠ كم/ الساعة حتى لا يصل إلى عمله متأخرًا:

• احسب مقدار التغير في سرعة سيارة أحمد من لحظة انطلاقه إلى لحظة توقفه عند الإشارة.

• احسب مقدار التغير في سرعة سيارة أحمد من لحظة انطلاقه بعد الإشارة حتى وصوله إلى مقر عمله.

• ما دلالة الإشارة في السؤالين السابقين؟

٢- تقديم تعريف التغير في س ورمزه Δس باستعراض مواقف حياتية، وكذلك التغير في درجة الحرارة، والتغير في سعر جهاز ما، والتغير في سعر أرض.

٣- مناقشة الطلبة في حل المثالين (١)، و (٢)، وتأكيد دلالة الإشارة السالبة في التغير.

٤- تقديم مفهوم التغير في ص ورمز Δص، وتوضيح ارتباطه بالتغير في س، ومناقشة المثال (٣) تمهيدًا لتقديم تعريف معدل التغير في الاقتران $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ ، والتركيز على الصور المختلفة لكتابته.

٥- مراجعة الطلبة في الاقترانات المتشعبة، وقيمة الاقتران عند نقطة ما.

٦- مناقشة الطلبة في المثال (٤)، ثم تكليفهم حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٧- استقصاء التفسير الهندسي لمعدل التغير، بتكليف الطلبة حل النشاط في الصفحة (٧٢) ضمن مجموعات ثنائية، ثم كتابة التعميم الذي يتوصلون إليه على اللوح.

٨- مناقشة الطلبة في المثال (٥)، ثم تكليفهم حل التدريب (٢)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٩- مناقشة الطلبة في المثال (٦).

١٠- تكليف الطلبة حل السؤال (٤) في دفاترهم بصورة فردية، ثم مناقشتهم في الإجابات.

١١- مناقشة الطلبة في التفسير الفيزيائي لمعدل التغير كما ورد في الكتاب المدرسي، ثم مناقشتهم في المثال (٧).

١٢- توجيه الطلبة إلى حل السؤال الآتي بصورة فردية:

يتحرك جسيم بحسب العلاقة ف(ن) =٢ن^{٢} +١، حيث ن الزمن بالثواني، ف(ن) المسافة بالأمتار:

• احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [٠، ٢] ثانية.

١٣- مناقشة الطلبة في المثال (٨)، ثم تكليفهم حل التدريب (٣) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٤- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٥- ختم الدرس بسؤال الطلبة: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟

معلومات إضافية

تُستخدَم معدلات التغير في مجالات حياتية كثيرة، مثل: دراسة تزايد عدد السكان، ومعدلات الربح، والسرعة، والتسارع.

أخطاء شائعة

– قد يخطئ بعض الطلبة في إجراء العمليات الحسابية على الأعداد الصحيحة، وإيجاد صورة عدد نسبي.

– قد يخطئ الطلبة في تطبيق قاعدة إيجاد ميل القاطع، أو معدل التغير في الفترة [س$_{١}$ ، س$_{٢}$]، فيُطبِّقون القاعدة على النحو الآتي:

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص_{١} - ص_{٢}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{ق(س_{١}) - ق(س_{٢})}{س_{٢} - س_{١}}$ ؛ لذا نبِّههم على وجوب تطبيق القاعدة بصورة صحيحة.

الفروق الفردية

علاج

– إذا كان ق(س) = س +١، وتغيرت س من ١ إلى ٣، فجد:

١) مقدار التغير في س.

٢) ق(١)، ق(٣)، ق(٣) – ق(١) .

٣) معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [٠، ٣].

إثراء

١) إذا كان ق(س) = (س+١)^{٢} فجد معدل تغير الاقتران ق حين تتغير س من س$_{١}$=١ بمقدار Δس= ٣

٢) إذا كان ميل القاطع لمنحنى الاقتران ق في الفترة [٠، ٣] يساوي –٢، وكان

هـ(س)= ٢س^{٢} – ٣ق(س)، فجد معدل تغير الاقتران هـ(س) في الفترة نفسها.

٣) إذا كان ميل القاطع المار بالنقطتين (–١، ٣)، و(٤، ق(٤)) يساوي ١، فجد قيمة ق(٤).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٢–١).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

١) $\frac{١}{١٥}$ ٢) $\frac{٢٥}{٢}$ ٣) صفر. ٤) ٢، معدل التغير = معامل س.

التدريب (٢)

٢٤

التدريب (٣)

-١

التدريب (٤)

Δص= ٣٤٠٠٠ - ٢٠٠٠٠ = ١٤٠٠٠ دينار.

$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{١٤٠٠٠}{٧}$ = ٢٠٠٠ دينار.

الأسئلة

١) أ) Δس = ٥ ب) $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$ = صفرًا.

٢) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = ٣$

٣) Δص = -٢١

٤) أ = $\frac{١٦}{٥}$.

٥) ٣

٦) ق(٣) = ٣

٧) ميل القاطع = ٦

٨) Δص = ٢٦ سم^{٣}.

٩) $\overline{ع}$ = -١٠ م/ث.

ثانيًا: المشتقة الأولى.

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

- يجد المشتقة الأولى للاقتران باستخدام تعريف المشتقة.
- يجد قيمة المشتقة الأولى للاقتران عند نقطة باستخدام تعريف المشتقة.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

ميل المماس، المشتقة الأولى للاقتران ق: $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$، قَ(س)، صَ.

المشتقة الأولى للاقتران ق عندما س= $س_1$: قَ($س_1$)، $\left.\frac{\Delta ص}{\Delta س}\right|_{س = س_1}$

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف الحادي عشر، كثيرات الحدود، والاقترانات الحقيقية.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٧٩ – ٨٦).

التعلم القبلي

معدل التغير، القاطع، المماس.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (فكر– انتقِ زميلًا – شارك).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في مفهوم القاطع الوارد ذكره في الصفحة (٧٩) من الكتاب المدرسي، ثم مناقشتهم في الشكل (٢–٤) لاستنتاج مفهوم المماس، وربطه بالمشتقة الأولى.

٢– تقديم تعريف المشتقة كما ورد ذكره في الكتاب المدرسي، ثم توضيح رموز المشتقة، ثم مناقشة الطلبة في المثال (١)، وتوضيح الخطوات بصورة مفصلة.

٣- تقديم تعريف المشتقة عند نقطة ما كما ورد ذكره في الكتاب المدرسي، ثم مناقشة الطلبة في المثال (٢).
٤- تكليف الطلبة حل التدريب (١)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٥- عرض شكل آخر لتعريف المشتقة كما ورد ذكره في الصفحة (٨٢) من الكتاب المدرسي، ثم مناقشة الطلبة في المثال (٣)، ثم تكليفهم حل التدريبين (٢)، و (٣)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٦- مناقشة الطلبة في المثالين (٤)، و(٥) اللذين يتضمنان اقترانات جذور تربيعية، ثم تكليفهم حل التدريب (٤)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٧- تكليف الطلبة حل التدريب (٥) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم حل السؤال على اللوح بمساعدة الطلبة.
٨- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٩- ختم الدرس بسؤال الطلبة: لخص بكلماتك الخاصة ما تعلمته في هذا الدرس.

معلومات إضافية

استخدم العلماء القدماء مفهوم المشتقة في الهندسة بوصفه ميل المماس، وكان شرف الدين الطوسي (١١٣٥م- ١٢١٣م) أول مَن اكتشف مشتقة كثير الحدود. أمّا الاتجاه الحديث في حساب التفاضل فيُعْزى إلى إسحق نيوتن (١٦٤٣م- ١٧٢٧م)، وليبنتز (١٦٤٦م- ١٧١٦م). وكان نيوتن أول مَن طبَّق التفاضل في الفيزياء النظرية، في حين طوَّر ليبنتز أكثر رموز التفاضل المستخدمة اليوم.

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة في إجراء العمليات الحسابية، وترتيب أولويات العمليات الحسابية، وتطبيق القانون.

الفروق الفردية

علاج

- جد المشتقة الأولى للاقتران ق(س) = ٨ باستخدام التعريف.

إثراء

- إذا كان ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{٥ - ٢\text{س}}$ باستخدام تعريف المشتقة الأولى عند نقطة، فجد قَ(-٢).

استراتيجية التقويم: التواصل، الملاحظة.	أداة التقويم: سلم التقدير (٢-٢).
استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.	أداة التقويم: ورقة العمل (٢-١)، الأسئلة (١)، (٢)، (٣).
استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.	أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١-٦).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

ق(س) = ٤

التدريب (٢)

ق(س) = ٢٤

التدريب (٣)

ق(س) = ٣س^{٢}

التدريب (٤)

ق(س) = $\frac{١}{\sqrt{٢س}}$ ، قَ(٨) = $\frac{١}{٤}$

التدريب (٥)

ق(س) = $\frac{٣}{(١-٣س)^{٢}}$ ، قَ($\frac{١}{٢}$) = ١٢

الأسئلة

١) قَ(س) = س^{٢}

٢) قَ(س) = ٤س

٣)

أ) قَ(س) = صفرًا ب) قَ(س) = -٥ جـ) $\frac{ص}{س}$ = ٢س-٢

د) قَ(س) = $\frac{٢}{\sqrt{٤س+٣}}$ هـ) قَ(س) = $\frac{١}{٢س^{٢}}$ و) $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-٤}{(٢س+٣)^{٢}}$

٤)

أ) قَ(-٢)= ٣ ب) $\frac{ص}{س}$ = -٨ جـ) $\frac{ص}{س}$ = -٥

د) $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-٣}{٢\sqrt{٨}}$ هـ) $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-٢}{٩}$ و) قَ(١)= $\frac{-١٥}{٤٩}$

أولًا: قواعد الاشتقاق.

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

- يطبق قواعد الاشتقاق لإيجاد مشتقة الاقترانات: ق(س)= ج، ق(س)= س^{ن} ، ق(س)= أ × م(س).
- يجد مشتقة مجموع اقترانين.
- يجد مشتقة الفرق بين اقترانين.
- يجد مشتقة حاصل ضرب اقترانين.
- يجد مشتقة قسمة اقترانين.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

مشتقة مجموع اقترانين، مشتقة الفرق بين اقترانين، مشتقة حاصل ضرب اقترانين، مشتقة قسمة اقترانين.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٨٧ – ٩٥).

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف الحادي عشر، الاقترانات الحقيقية.

التعلم القبلي

المشتقة الأولى، المشتقة الأولى عندما س= س$_{١}$.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (فكر – انتقِ زميلًا – شارك، التعلم التعاوني الجماعي)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بتذكير الطلبة بالمشتقة الأولى باستخدام تعريف المشتقة، ثم طرح السؤال الآتي:

- جد المشتقة للاقتران ق(س)= س^{٢} (س–٥) باستخدام تعريف مشتقة.

٢- التوضيح للطلبة أهمية وجود طرائق بديلة تسهِّل عملية الاشتقاق، وتوفِّر الوقت والجهد، وهي القواعد التي سيتعلمونها في هذا الفصل.

٣- تقسيم الطلبة إلى ست مجموعات، ثم توجيه أفراد كل مجموعة إلى حل فرع من النشاط في الصفحة (٨٧)، ثم مناقشة الإجابات، ثم كتابتها على اللوح، ثم الطلب إليهم اضافة اقتران إلى النشاط بصورة:

ق(س) = أ × م (س)، بحيث تنفِّذ كل مجموعة اقترانًا مختلفًا، واستقصاء القاعدة (١)، ثم كتابتها على اللوح.

٤- مناقشة الطلبة في المثال (١)، ثم تكليفهم حل التدريب (١)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٥- توجيه الطلبة إلى إيجاد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للاقتران ق(س) = س^{٢} +٣س -١

٦- توجيه الطلبة إلى الإجابة عن السؤال الآتي ضمن مجموعات ثنائية:

ما مشتقة (س^{٢})، ومشتقة (٣س)، ومشتقة (-١)؟ ثم مناقشتهم في الإجابات لاستنتاج قاعدة اشتقاق مجموع اقترانين.

٧- كتابة القاعدة (٢) على اللوح، ثم مناقشة الطلبة فيها، ثم تكليفهم حل السؤال الآتي ضمن مجموعات ثنائية:

- جد قَ(س) للاقترانات الآتية:
  - ق(س) = ٥س^{٤}- ٣س^{٢} - س +١ ، س= -٢
  - ق(س) = س$^{-٣}$ + س^{٢} + ٣
  - ق(س) =٤ س ، عند س= ٤

٨- متابعة الطلبة في أثناء الإجابة عن الأسئلة، ثم مناقشة الإجابات على اللوح، ثم تكليفهم حل التدريب (٢)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٩- كتابة القاعدة (٣) على اللوح بالرموز والكلمات، والرجوع إلى المسألة الوارد ذكرها في بداية الدرس، وتوضيح كيفية تطبيق القاعدة؛ لتوفير الوقت والجهد.

١٠- مناقشة الطلبة في المثال (٤) على اللوح.

١١- تكليف الطلبة حل التدريب (٣) فرادى، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٢- كتابة القاعدة (٤) على اللوح بالرموز والكلمات، ثم مناقشة الطلبة في المثال (٥) على اللوح، ثم الطلب إليهم تنفيذ النشاط في الصفحة (٩٣) ضمن مجموعات ثنائية؛ لاستقصاء النتيجة الوارد ذكرها في الكتاب المدرسي، وتذكير الطلبة أنها تعميم من القاعدة (٤).

١٣- مناقشة الطلبة في المثال (٦) على اللوح، ثم تكليفهم حل التدريب (٤)، والتدريب (٥)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٤- توجيه الطلبة إلى حل نشاط (فكر وناقش) في الصفحتين (٩١)، و(٩٤) ضمن مجموعات ثنائية، ثم مناقشتهم في الإجابات، وتعزيز الصحيح منها.

١٥- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٦-ختم الدرس بسؤال الطلبة: لخص بكلماتك الخاصة ما تعلمته في هذا الدرس.

معلومات إضافية

يعتمد إيجاد المشتقات على استخدام قواعد الاشتقاق؛ لذا يتعيَّن على الطالب فهم قواعد الاشتقاق وحفظها، واختيار المناسب منها عند حل التمارين والمسائل، ويشبه ذلك استخدام الطريقه المناسبة لإيجاد النهاية.

أخطاء شائعة

يخطئ بعض الطلبة في العمليات الحسابية للأعداد الصحيحة، وفي اشتقاق حاصل ضرب اقترانين؛ باشتقاق كل حد وحده، ويخطئون أيضًا في اشتقاق قسمة اقترانين؛ بالعمل على اشتقاق البسط، ثم اشتقاق المقام من دون تطبيق القاعدة.

الفروق الفردية

علاج

– إذا كان ق(س)= ٢س +٧ – س^{٣}، هـ(س)= س(٥س –٦) ، فجد قَ(س)، هـَ(١).

إثراء

– إذا كان ق(س) = (س^{٢} +٣س – ٥) × ٣ هـ (س)، وكان هـ(س) = (٨ – ٤س^{٣})، فجد قَ(١).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.	أداة التقويم: ورقة العمل (٢–١)، السؤال الرابع، البندان: (١)، و(٢).
استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.	أداة التقويم: سلم التقدير (٢–٣).
استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.	أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١–٦).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

١) قَ(س)= $\frac{-٢}{٣}$ س$^{-\frac{٥}{٣}}$

٢) $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-١}{٢\sqrt{س^{٣}}}$

٣) $\frac{ص}{س}$ = –١٠س$^{-٧}$

٤) $\frac{ص}{س}$ = ١

التدريب (٢)

١) $\frac{ص}{س}$ = ٢ + $\frac{٢}{س^{٢}}$

٢) $\frac{ص}{س}$ = ١٢س^{٢} – $\frac{١}{س^{٢}}$

التدريب (٣)

١) $\frac{ء ص}{ء س} = (٣س^{٢}+٧)(-٥س^{-٦}) + (س^{-٥}+٣)(٦س)$

٢) قَ(س) =٩

٣) $\frac{ء ص}{ء س} = (٣س^{٢}-٤)(٢س) + (س^{٢}-١)(٦س)$

التدريب (٤)

١) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١١}{(٣-س)^{٢}}$

٢) $\frac{ء ص}{ء س} = ٢س+٢، س \neq ٢$

٣) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-٣}{٢}$

٤) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-٣٣س^{٢}}{(س^{٣}+٦)^{٢}}$

التدريب (٥)

قَ(س)= ٦س^{٢}-٦س

الأسئلة

١)

أ) قَ(س) = -٦س^{٢}

ب) قَ(س)= $\frac{٣}{س^{٢}}$

جـ) قَ(س)= $-س^{-\frac{٣}{٢}} + \frac{٥}{٣}س^{\frac{٢}{٣}}+١$

د) $\frac{ء ص}{ء س} = -٣٥س^{٦}+٥٠س^{٤}+٩س^{٢}-٦$

هـ) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٢س^{٢}-٦س-٢}{(٢س-٣)^{٢}}$

و) قَ(س) = $\frac{س^{٢}+٤}{(٤-س^{٢})^{٢}}$

ز) قَ(س)= -٢٠س^{٣}+٦س^{٢}-٣٠س+٦

٢)

أ) $\frac{ء ص}{ء س} = ١٤٧$

ب) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١٠}{٣}$

جـ) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-٣}{١٦}$

د) قَ(١) =١٠

هـ) قَ(-٢)= -١١٢

و) قَ(١)= -٢

٣) قَ(١)= $\frac{١}{٦}$

٤)

أ) ٨

ب) صفر

جـ) صفر

د) $\frac{-٣}{٤}$

هـ) -١

و) -٨

ثانيًا: قاعدة السلسلة.

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

– يستخدم قاعدة السلسلة في إيجاد المشتقة.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

قاعدة السلسلة، مشتقة اقتران كثير حدود مرفوع لقوة حقيقية، مشتقة اقتران مركب.

التكامل الرأسي

– كتاب الرياضيات، الصف الحادي عشر، الاقترانات الحقيقية وتركيب الاقترانات.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (٩٦–١٠١).

التعلم القبلي

قواعد الاشتقاق، تركيب الاقترانات (ق ٥ هـ) (س) .

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي، الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر– انتقِ زميلًا– شارك)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بتذكير الطلبة بمفهوم مشتقة ص بالنسبة إلى المتغير س $(\frac{د ص}{د س})$، ومشتقة ص بالنسبة إلى المتغير ع $(\frac{د ص}{د ع})$.

٢–تذكير الطلبة بقواعد الاشتقاق عن طريق طرح بعض الأسئلة، مثل:

- جد المشتقة الأولى للاقترانين الآتيين:

  ق(س)= س^{٢} + ٢ ، هـ(س)= ٥– س^{٢}+ ٣س.

- هل يمكنك إيجاد مشتقة الاقتران ل(س)، حيث ل(س)= (٥ – س^{٢})$^{-٣}$؟

٣– التوضيح للطلبة أنه لا يمكن إيجاد المشتقة الأولى للاقتران ل(س) بحسب القواعد التي تعرَّفوها سابقًا، وأن هذا ما سيتعرَّفونه في هذا الدرس.

٤– توضيح فكرة المثال (١)، والحاجة إلى قاعدة السلسلة عن طريق مناقشة الطلبة في المثال الآتي على اللوح:

إذا كان ص=٢ ع^{٢}، ع= ٣س^{٢}–١، فجد $\frac{د ص}{د س}$.

٥- التوضيح للطلبة أنه لا يمكن إيجاد المشتقة بصورة مباشرة؛ لذا يجب إيجاد ص بدلالة المتغير س؛ وذلك بتعويض قيمة ع في الاقتران ص، ثم الاشتقاق مباشرة بحسب القواعد.

٦- توجيه السؤال الآتي إلى الطلبة:

- هل يمكن إيجاد المشتقة الأولى بطريقة أخرى؟

٧- تذكير الطلبة أنه يمكنهم إجابة هذا السؤال بعد إجابتهم الأسئلة الآتية ضمن مجموعات ثنائية:

- جد ناتج كل مما يأتي:

أ) $\frac{د ص}{د ع}$. ب) $\frac{د ع}{د س}$. جـ) $\frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د ص}$.

- عوِّض قيمة ع بدلالة س.
- ماذا تلاحظ؟

٨- الاستماع إلى إجابات الطلبة، ثم مناقشتهم فيها، ثم كتابة القاعدة (١) من الكتاب المدرسي على اللوح.

٩- مناقشة الطلبة في المثال (٢)، ثم تكليفهم حل التدريب (١) بصورة فردية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٠- عرض المثال الآتي على اللوح:

إذا كان ص= $(٣- س^{٢})^{٤}$، فجد $\frac{د ص}{د س}$ موضِّحًا خطوات الحل.

١١- طرح السؤال الآتي على الطلبة:

- هل توجد طريقة أخرى لإيجاد $\frac{د ص}{د س}$ ؟ (ستتم الإجابة عن هذا السؤال عن طريق كتابة القاعدة (٢) على اللوح، ثم حل المثال السابق باستخدامها).

١٢- مناقشة الطلبة في المثال (٤)، ثم تكليفهم حل التدريب (٢)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٣- مناقشة الطلبة في المثال (٥)، ثم ذكر أمثلة أخرى تتضمن اقترانات جذور فردية، واقترانات جذر تربيعي لاستنتاج القاعدة (٣) المتعلقة بمشتقة الجذر التربيعي، ثم كتابتها على اللوح.

١٤- تكليف الطلبة حل التدريبين (٣)، و (٤)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٥- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٦- ختم الدرس بتوزيع بطاقة الخروج (٢-٤) على الطلبة.

أخطاء شائعة

يخطئ الطلبة في العمليات الحسابية للأعداد الحقيقية، وفي اشتقاق الاقتران المركب؛ باشتقاق الاقتران داخل القوة.

الفروق الفردية

علاج

- إذا كان ق(س) = (٤ −٥س)^{٣}، فجد قَ(س).

إثراء

١) إذا كان ق(س) = (س$^{-٥}$ +س^{٢})^{٣} هـ^{٣}(س)، فجد قَ(س).

٢) إذا كان ع(س) = $\frac{(٤س+س^{٢})^{٤}}{س^{٥}}$ ، فجد عَ(س).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.	أداة التقويم: ورقة العمل (٢−١)، السؤال الرابع، البند (٣).
استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.	أداة التقويم: بطاقة الخروج (٢−٦).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

$\frac{ص}{س}$ = −٢٠

التدريب (٢)

$\frac{ص}{س}$ = −٢(س^{٢}+٤س+٥)$^{-٣}$(٢س+٤)

التدريب (٣)

١) $\frac{ص}{س} = \frac{٢س-١}{٢\sqrt{س^{٢}-س+٣}}$

٢) $\frac{ص}{س} = \frac{-١}{٣\sqrt[٣]{(٢-س)^{٢}}}$

التدريب (٤)

قَ(س)= $\frac{-٣٠س}{(٣س^{٢}+٥)^{٦}}$

الأسئلة

١)

أ) $\frac{د ص}{د س} = \frac{٦ س^{٢}}{\sqrt{٤ س^{٣} - ٨}}$

ب) $\frac{د ص}{د س} = ٩٦$

٢)

أ) $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ س}{\sqrt{٢ س^{٢} + ١}}$

ب) قَ(س) $= \frac{- ٦ س}{(٣ + س^{٢})^{٤}}$

جـ) مَ(س) $= ١٢ (٤ س + ١)^{٢}$

د) قَ(س) $= - ٣٠ س^{- ٢} (٥ - ٥ س^{٣}) + (- ٤ س^{- ٥}) (٥ - ٥ س^{٣})^{٢}$

هـ) $\frac{د ص}{د س} = - ٢٠ (س + ٧ س^{- ٢}) (٩ - ٥ س)^{٣} + (٩ - ٥ س)^{٤} (١ - ١٤ س^{- ٣})$

٣)

أ) = صفرًا

ب) $\frac{د ص}{د س} = \frac{- ٩٠}{٦٤}$

جـ) $\frac{د ص}{د س} = - ١٠٠$

د) $\frac{د ص}{د س} = ٥٦٠$

ثالثًا: مشتقات الاقترانات المثلثية. | **عدد الحصص:** حصتان.

النتاجات

– يحسب مشتقة الاقترانات الآتية:

جاس، جتاس، ظاس.

– يستخدم قاعدة السلسلة لحساب مشتقة الاقترانات الآتية:

جا(هـ(س))، جتا(هـ(س))، ظا(هـ(س)).

المفاهيم والمصطلحات والرموز

مشتقة الاقتران المثلثي.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (١٠٢– ١٠٧).

التكامل الرأسي

– كتاب الرياضيات، الصفان: التاسع والعاشر، الاقترانات المثلثية، والنسب المثلثية.

التعلم القبلي

قواعد الاشتقاق، قاعدة السلسلة.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي، الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر–انتقِ زميلًا – شارك، التعلم التعاوني الجماعي)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بتذكير الطلبة بالاقترانات المثلثية: جاس، جتاس، ظاس، وبيان أن هذه الاقترانات يمكن اشتقاقها مثل بقية الاقترانات وفق قواعد خاصة بها.

٢– كتابة القاعدة (١) على اللوح، ثم توضيحها للطلبة، ثم مناقشتهم في المثالين (١)، و (٢) على اللوح.

٣– تكليف الطلبة حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٤– عرض المسألة الوارد ذكرها في بداية الدرس، أو عرض مثال مشابه على اللوح؛ على أن تكون الزاوية في الاقتران المثلثي اقترانًا، ثم سؤال الطلبة عن إمكانية إيجاد مشتقة مثل هذه الاقترانات بصورة مباشرة اعتمادًا على القاعدة (١)، وسماع مقترحاتهم، وتعزيز الصحيح منها.

٥- كتابة المثال الآتي على اللوح، ثم الطلب إلى الطلبة حله ضمن مجموعات ثنائية:

إذا كان ص= جا (٣س^{٢}-٢)، فأجب عن الأسئلة الآتية:

- افرض الزاوية ع.
- اكتب الاقتران بدلالة ع.
- جد $\frac{ د ص}{ د ع}$ ، $\frac{ د ع}{ د س}$ ، $\frac{ د ص}{ د س}$.
- هل يمكنك الوصول إلى النتيجة نفسها بطريقة أخرى؟
- جد $\frac{ د ص}{ د س}$ للاقترانين الآتيين:

ق(س)= جتا(س^{٢}+١)، ق(س)= ظا(٤- س^{٣}).

- هل يمكنك إيجاد $\frac{ د ص}{ د س}$ بطريقة أخرى في الأسئلة السابقة؟

٦- كتابة القاعدة (٢) على اللوح، ثم مناقشة الطلبة فيها، ثم تكليف الطلبة حل التدريبين (٢)، و (٣) ضمن مجموعات، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٧- استخدام استراتيجية (فكر- انتقِ زميلًا- شارك) في تنفيذ نشاط (فكر وناقش)، ثم تنظيم نقاش عن أسئلة النشاط وإجاباتها، وكتابة الصحيح منها على اللوح.

٨- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٩- ختم الدرس بعمل مسابقة بين طالبين، أو ممارسة لعبة.

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة عند اشتقاق الاقترانات المثلثية بعدم كتابة مشتقة الزاوية، أو اشتقاق الزاوية داخل الاقتران المثلثي.

الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ق(س) = ظا(٣ + س)، فجد قَ(س).

٢) إذا كان ق(س) = س^{٢} + جتا٦س، فجد قَ(س).

إثراء

١) إذا كان ق(س) = جتا(جاس)، فجد قَ(س).

٢) إذا كان ق(س) = (س + جا س) ظا٤(٧ - س^{٣})، فجد قَ(س) .

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢-٤).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

١) $\frac{د ص}{د س} = \frac{٢ \text{ جاس}}{\text{جتا}^٢ س} + \text{قا}^٢ س + ٢$

٢) $\frac{د ص}{د س} = \text{جتاس} \times \text{قا}^٢ س + \text{ظاس} \times -\text{جاس}$

٣) $\frac{د ص}{د س} = -\text{جا}^٢ س + \text{جتا}^٢ س$

٤) $\frac{د ص}{د س} = س^٢ \text{ قا}^٢ س + ٢ س \text{ ظاس}$

التدريب (٢)

١) $\frac{د ص}{د س} = ٣ \text{ظا}^٢ س \text{ قا}^٢ س$

٢) $\frac{د ص}{د س} = -٨ \text{جا} ٤ س + ٢ \text{ جاس جتاس} - ٥ \text{قا}^٢ (٥ س + ١)$

التدريب (٣)

قَ(س) = ٢س قا^٢(س^٢+٥)

الأسئلة

١)

أ) $\frac{د ص}{د س} = س^٢ \text{جتاس} + ٢ س \text{ جاس}$

ب) $\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{١ + \text{جتاس}}$

جـ) $\frac{د ص}{د س} = -٥ س^٢ \text{جاس} + ١٠ س \text{ جتاس} - \text{قا}^٢ س$

د) $\frac{ء ص}{ء س}$ = س قا^{٢}س + ظاس + ٤س(س^{٢} + ١)

هـ) هَ(س)= ٦ظا٣س قا^{٢}٣س − جاس

و) $\frac{ء ص}{ء س}$= −١٢جا٢س(جتا٢س)^{٥}

ز) $\frac{ء ص}{ء س}$= ٣جتا (٣س + ٥)

ح) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ١٢جتا٤س + ٣جتا^{٢}س جاس− ٤س قا^{٢}٢س^{٢}

ط) $\frac{ء ص}{ء س}$ = −٢(جاس− جتاس)$^{-٣}$(جتاس + جاس)

ي) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢جاس جتاس (١−جتاس) + جا^{٣}س

ك) $\frac{ء ص}{ء س}$ = (س جاس)^{٣}قا^{٢}س + ٣ظاس(س جاس)^{٢}(س جتاس + جاس)

رابعًا: المشتقات العليا.

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

– يجد المشتقات العليا لاقترانات معطاة حتى المشتقة الثانية.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

المشتقة الثانية للاقتران، قً(س)، صً، $\frac{ء^{٢}ص}{ء س^{٢}}$.

التكامل الرأسي

– كتاب الرياضيات، الصف الحادي عشر، الاقترانات الحقيقية.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (١٠٨–١١١).

التعلم القبلي

المشتقة الأولى للاقتران، قواعد الاشتقاق، قاعدة السلسلة.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في قواعد الاشتقاق وقاعدة السلسلة، عن طريق مناقشة السؤال الآتي:

- جد المشتقة الأولى للاقترانين الآتيين:
  - ق(س) = س جاس.
  - ق(س) = جتا (٣س + ١).

٢– توجيه الأسئلة الآتية إلى الطلبة:

- هل نكتفي بإيجاد المشتقة الأولى للاقترانات؟
- هل توجد مشتقة ثانية ومشتقة ثالثة؟
- ما المشتقة الثانية للاقتران ق(س) = ٥س^{٣} بحسب رأيك؟ ثم الاستماع إلى إجاباتهم، وتعزيز الصحيح منها.

٣– توضيح مفهوم المشتقة الثانية، ثم عرض رموزها على اللوح، ثم توضيح مفهوم المشتقة الثالثة، ثم عرض رموزها على اللوح، مع التنويه بأنه سيتم الاكتفاء بالمشتقة الثانية في تمارين الكتاب المدرسي.

٤- تقسيم الطلبة إلى مجموعات، ثم توجيههم إلى حل التدريب (١)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٥- مناقشة الطلبة في المثال (٣) على اللوح، ثم توجيههم إلى حله في دفاترهم، ومتابعتهم في أثناء ذلك.

٦- مناقشة الطلبة في السؤال الآتي:

- إذا كان ق(س)= س^{٣} - ٤س^{٢} + ٣، فجد أصفار المشتقة الثانية.

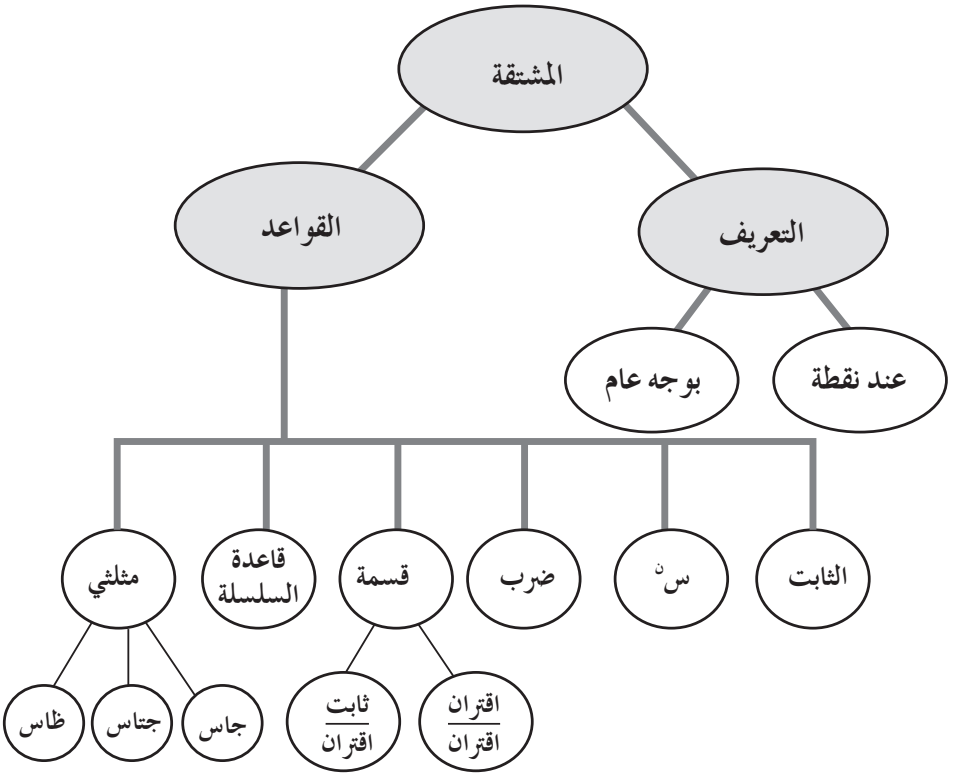
٧- مناقشة الطلبة في المثال (٤) على اللوح، ثم توجيههم إلى حل التدريب (٢) فرادى، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٨- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٩- ختم الدرس بعمل مسابقة بين الطلبة عن المشتقة الثانية لاقترانات معطاة.

معلومات إضافية

- المشتقة الأولى لاقتران المسافة بالنسبة إلى الزمن هي السرعة، والمشتقة الثانية لاقتران المسافة بالنسبة إلى الزمن هي التسارع.
- المخطط الآتي يلخص موضوعات الوحدة، ويمكن للمعلم رسمه على اللوح، ثم تكليف الطلبة تعبئته لزيادة فهمهم وتنظيم معرفتهم بالمحتوى العلمي:



أخطاء شائعة

قد لا يراعي بعض الطلبة قواعد الاشتقاق عند إيجاد المشتقة الثانية، مثل قاعدة ضرب اقترانين.

الفروق الفردية

علاج

- إذا كان ق(س) = س^{٢}، فجد قً(س).

إثراء

١) إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٤س^{٢} − س + ١، فجد قيمة س التي تجعل قً(س) = ٥

٢) إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية، وكان ق(س) يمر بالنقطة (٠،٧)، و قً(١)= ٣، قً(−١) = −٤، فجد قاعدة ق(س).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل.	أداة التقويم: سلم التقدير (٢−٤).
استراتيجية التقويم: الملاحظة.	أداة التقويم: قائمة الرصد (٢−٥).
استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.	أداة التقويم:اختبار نهاية الوحدة.

التدريبات

التدريب (١)

١) $\frac{د^{٢}ص}{د\ س^{٢}} = ٢-$جتاس

٢) $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = \frac{-١}{٤} س^{\frac{-٣}{٢}}$

٣) $\frac{د^{٢}ص}{د\ س^{٢}} = \frac{-١٠}{١٢٥}$

التدريب (٢)

أ = ٢ ، −٢

الأسئلة

١)

أ) قً(س) = −٢٠٠س^{٣}+١٩٢ س^{٢}

ب) $\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}\Big|_{س=١} = -١٨$

جـ) قً(س) = −٢جتاس

د) قً(−٢) = −١٤

هـ) قً(س) = −٤جاس جتا٢س− ٥جتاس جا٢س

و) قً(٠)= ٦٤

ز) قً(س) = −٤جا (٢س−١)

٢)

أ = ٢ ، ب = −٢

٣)

أ = ٩ ، ب = ٣

٤)

قَ(س) = −٢جا٢س

قً(س)= −٤جتا٢س

قً(س) + ٦ق(س)= −٤جتا٢س + ٦جتا٢س= ٢جتا٢س

٥)

قً(س)= − س^{٢}جاس+٤س جتاس+ ٢جاس

إجابات أسئلة الوحدة

١)

أ) $\Delta ص = \frac{-٣}{٤}$ ب) $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{-٣}{٤}$

٢)

أ = ١٠

٣)

ع = ١٠م/ ث.

٤)

قَ(٢) = ٢٠

٥)

أ) س= صفرًا. ب) $\frac{ء ص}{ء س}$ = صفرًا.

٦)

أ) قَ(س)= −٥ ب) هَـ(س)= ٤س

جـ) لَ(س)= $\frac{-١}{(س+٢)^{٢}}$ د) مَ (س) = $\frac{١}{\sqrt{٢س+٤}}$

هـ) قَ(٣) = ٢ و) قَ(٢) =١

٧)

أ) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{٣س^{٢}+١٠س}{\sqrt{٢س^{٣}+٥س^{٢}}}$ ب) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-١}{\sqrt{٢-٢س}}$

جـ) $\frac{ء ص}{ء س}$ = ٢س جا٣س+ ٣س^{٢}جتا٣س د) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-١٦}{(٢س-٣)^{٢}} - ١٠$جا^{٤} ٢س جتا٢س

هـ) $\frac{ء ص}{ء س}$ =٣٢ و) $\frac{ء ص}{ء س} = \frac{-٣جاس}{\sqrt{٢+٤جتاس+٣}}$

٨)

أ) قً(س)= −٢٤س+٦ ب) قً(س)= ٨٠(٢س−١)^{٣}

جـ) قً(س)= −س^{٢} جتاس − ٤س جاس + ٢جتاس+١٢س$^{-٥}$

٩)

قَ(١) =٢٤٠

١٠)

أ = ٦

١١)

أ = ٢ ، −٢

١٢)

$س_{١} = \frac{٧}{١٢}$

١٣)

أ) قَ(−٢) = $\frac{١٧}{٤}$ ب) قَ(−٢) = $\frac{٣}{٤}$

١٤)

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
جـ	د	ب	ب	أ	جـ	ب	د	أ

ورقة العمل (٢-١)

١) باستخدام تعريف المشتقة، جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) ق(س) = −٢

ب) ق(س) = ٢س

جـ) ق(س) = ٢− س

٢) استخدم تعريف المشتقة الأولى في حساب مشتقة كل مما يأتي عند قيمة س المبينة إزاء كل منها:

أ) ق(س) = ٢ − ٣س ، س = −٢

ب) ق(س) = س + ١ ، س = ٤

جـ) ق(س) = $\frac{٢}{س}$ ، س = ١

٣) استخدم تعريف المشتقة الأولى في حساب مشتقة كل مما يأتي عند قيمة س المبينة إزاء كل منها:

أ) ق(س) = $\sqrt{س^{٣}}$ ، س = ٢

ب) ق(س) = $\sqrt{س^{٢}-١}$ ، س = −٢

جـ) ق(س) = $\frac{٣}{\sqrt{س^{٢}+١}}$ ، س = ١

٤) باستخدام قواعد الاشتقاق، جد قَ(س) في الأسئلة (١)، (٢)، (٣) جميعها.

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٢-١).

النتاج: يجد معدل التغير لاقتران ما، ويفسره هندسيًّا وفيزيائيًّا.

الرقم	مؤشر الأداء	يتقن	لا يتقن
١	يجد مقدار التغير في س.		
٢	يجد مقدار التغير في ص.		
٣	يجد معدل التغير في الاقتران.		
٤	يفسر معدل التغير هندسيًّا.		
٥	يفسر معدل التغير فيزيائيًّا.		

استراتيجية التقويم: الملاحظة، التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢-٢).

النتاج: يجد المشتقة الأولى باستخدام تعريف المشتقة.

الرقم	مؤشر الأداء	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	ضعيف
١	يتعرف مفهوم تعريف المشتقة.				
٢	يجد مشتقة اقتران ما باستخدام تعريف المشتقة.				
٣	يجد مشتقة اقتران ما عند نقطة باستخدام تعريف المشتقة.				

ممتاز: إذا أنجز الطالب المهمة بصورة صحيحة، من دون مساعدة.

جيد جدًّا: إذا أنجز الطالب المهمة بوجود خطأ، ومن دون مساعدة.

جيد: إذا أنجز الطالب المهمة بوجود خطأ، وبوجود مساعدة.

ضعيف: إذا أنجز الطالب المهمة بوجود أخطاء، وبوجود مساعدة.

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢-٣).

النتاج: يجد المشتقة الأولى باستخدام قواعد الاشتقاق.

الرقم	مؤشر الأداء	٤	٣	٢	١
١	يجد مشتقة الاقترانات: جـ، س^{ن}، أس^{ن}.				
٢	يجد مشتقة مجموع اقترانين.				
٣	يجد مشتقة الفرق بين اقترانين.				
٤	يجد مشتقة حاصل ضرب اقترانين.				
٥	يجد مشتقة خارج قسمة اقترانين.				
٦	يجد مشتقة اقترن عند نقطة ما باستخدام القواعد.				

(٤) إذا أنجز الطالب المهمة بصورة صحيحة، من دون مساعدة.

(٣) إذا أنجز الطالب المهمة بوجود خطأ، ومن دون مساعدة.

(٢) إذا أنجز الطالب المهمة بوجود خطأ، وبوجود مساعدة.

(١) إذا أنجز الطالب المهمة بوجود أخطاء، وبوجود مساعدة.

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: سلم التقدير (٢ – ٤).

النتاجات:

١– يجد مشتقات الاقترانات المثلثية.

٢– يجد المشتقات العليا لاقترانات معطاة حتى المشتقة الثانية.

الرقم	مؤشر الأداء	ممتاز	متوسط	ضعيف
	مشتقة الاقترانات المثلثية			
١	يحسب مشتقة الاقترانات المثلثية: جاس، جتاس، ظاس.			
٢	يحسب مشتقات الاقترانات المثلثية في صورة جا (هـ(س))، جتا (هـ(س))، ظا (هـ(س)).			
٣	يراعي قواعد الاشتقاق عند اشتقاق الاقترانات المثلثية.			
	المشتقات العليا			
١	يتعرف رموز المشتقة الثانية.			
٢	يحسب المشتقة الثانية لاقترانات معطاة.			
٣	يجد قيم الثوابت عند إعطاء المشتقة الثانية.			

ممتاز: إذا أنجز الطالب المهمة من دون أخطاء.

متوسط: إذا أنجز الطالب المهمة بوجود خطأ بسيط.

ضعيف: إذا أنجز الطالب المهمة بوجود أخطاء.

استراتيجية التقويم: الملاحظة.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٢-٥).

النتاج: تقويم أداء الطالب في أثناء العمل ضمن مجموعات تعاونية.

الرقم	مؤشر الأداء	نعم	لا
١	يتقبل زملاءه في المجموعة نفسها.		
٢	يقوم بالمهام الموكولة إليه.		
٣	يساعد زملاءه في المجموعة عند الحاجة.		
٤	يشارك في المناقشة.		
٥	يعبر عن رأيه بوضوح.		
٦	يبادر إلى تحمل أعباء المهام الطارئة.		

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.

أداة التقويم: بطاقة الخروج (٢-٦).

الاسم: ..... .

الموضوع: ..... .

ماذا تعلمت في هذا الدرس؟

.....

.....

.....

. .....

ما أكثر النقاط وضوحًا؟

.....

.....

.....

. .....

ما أكثر النقاط غموضًا؟

.....

.....

.....

. .....

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: اختبار نهاية الوحدة.

١) يتكون هذا السؤال من أربع فقرات من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة أربعة بدائل، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان ق(س)= ٣س – س^{٢} ، وتغيرت س من ٢ إلى ٤، فإن معدل التغير للاقتران ق(س) هو:

أ)–٢ ب) –٣ جـ) –١ د) –٦

(٢) إذا كان ق(س)= هـ(س) × ل(س)، وكان ل(س)، هـ(س) قابلين للاشتقاق، فإن قَ(س) تساوي:

أ) هـَ(س) × لَ(س) ب) هـ(س) × لَ(س) – هـَ(س) × ل(س)

جـ) هـَ(س) + لَ(س) د) هـ(س) × لَ(س) + هـَ(س) × ل(س)

(٣) إذا كان ق(س)= س^{٢}، فإن ميل القاطع المار بالنقطتين (–٢، ٤)، (١، ١) يساوي:

أ) –٣ ب) –١ جـ) ١ د) ٣

(٤) إذا كان ق(س)= جاس، فإن قً(س) تساوي:

أ) جتاس ب) – جتاس جـ) جاس د) – جاس

٢) أ) إذا كان ق(س)=٢س^{٣}+١، فجد قَ(–٢) باستخدام تعريف المشتقة.

ب) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [–٢، –١] يساوي ٣، وكان هـ (س) = س^{٢}– ق(س)، فجد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة نفسها.

جـ) إذا كان ق(س)= س^{٤}– أس^{٢}+ س، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل قً(–١)= صفرًا.

٣) جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

أ) ل(س)= (٤س + ١)^{٣}

ب) ق(س)= ٦ظاس – جتا^{٢}(٣س)

جـ) هـ(س)= $\frac{\text{س}^{٢}+١}{\text{س}-١}$

د) ص= ع^{٣}+١ ، ع= ٣س – ١

هـ) ص= س^{٣}جاس – ظا(جتاس)

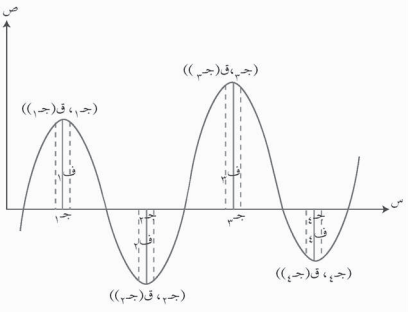
الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

٣ تطبيقات التفاضل

Applications of Differentiation

بعد أن تعرفت المشتقة وقواعد الاشتقاق في الوحدة السابقة، ستتعرف الآن كيف تستخدم المشتقة في حل مسائل متنوعة تتعلق ببعض التطبيقات الفيزيائية، والهندسية، والاقتصادية. وستتعرف أيضًا كيف يمكن إيجاد تزايد منحنى الاقتران وتناقصه اعتمادًا على مشتقة الاقتران الأولى، وتحديد قيم الاقتران القصوى (العظمى، الصغرى)، وحل مسائل عملية تتعلق بالقيم القصوى.



يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- اكتساب مهارة إيجاد الميل ومعادلة المماس لمنحنى الاقتران.
- حل مسائل تطبيقية على المسافة، والسرعة، والتسارع، مُبرِّرًا الحل.
- تحديد فترات التزايد والتناقص باستخدام اختبار المشتقة الأولى.
- تحديد القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الأولى، واختبار المشتقة الثانية.
- حل مسائل تطبيقية على القيم القصوى.

تهيئة

١) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين: (١ ،٣)، و(٢، ٦).

٢) اكتب معادلة المستقيم في كل مما يأتي في صورة: ص= أ س + ب:

أ) ص− ٥= ٤(س −٧). ب) ص − ٧ = −٥(س + ٦).

٣) حل كلًّا من المعادلات الآتية:

أ) س^{٢} − ٣س + ٢= ٠ ب) ٣س^{٢} − ٦س = ٠

جـ) س^{٢} + ١٠س= − ٢٥

٤) حل المتباينتين الآتيتين:

أ) س^{٢} −٥س > ٠ ب) س^{٢} + س<٢

٥) قطعة أرض مستطيلة الشكل، طولها ٨٠ كم، وعرضها ٦٠ كم، جد:

أ) مساحة الأرض. ب) محيط الأرض.

٦) جد حجم متوازي المستطيلات الذي أبعاده: ٦سم، ٥سم، ٢سم.

٧) جد مساحة المثلث الذي طول قاعدته ٦سم، وارتفاعه ٥سم.

٨) مكعب طول ضلعه ٤سم، جد:

أ) مساحة أحد أوجه المكعب. ب) حجم المكعب.

٩) يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بمبلغ ١٠٠ دينار. إذا كانت تكلفة إنتاج س وحدة من هذه السلعة هي ك(س)= ٠,١٥س +٢٠س^{٢} + ٣٥ دينارًا، فاكتب الاقتران الذي يمثل الربح الناتج عن بيع س قطعة.

١٠) أي الاقترانات الآتية منحناه متزايد دائمًا، مبرِّرًا إجابتك:

أ) ق(س) = ٨ ب) هـ (س) = ٩ س + ٦

جـ) و(س) = س^{٢}+١ د) ك(س)= ٦−٣س

إجابات أسئلة التهيئة

١) ص−٣=٣(س−١)

٢)

أ) ص= ٤س − ٢٣ ب) ص= −٥س − ٢٣

٣)

أ) س= ١، س = ٢ ب) س=٠،س = ٢

جـ) س= −٥

٤)

أ) (٥،∞) ،(−∞، −٥) ب) (−٢،١)

٥)

أ) مساحة الأرض: ٤٨٠٠كم^{٢}. ب) محيط الأرض: ٢٨٠ كم.

٦) حجم متوازي المستطيلات=٦ × ٥× ٢ =٦٠ سم^{٣}.

٧) مساحة المثلث= $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × الارتفاع = ١٥سم^{٢}.

٨)

أ) مساحة الوجه مربع الشكل= (طول الضلع)^{٢} = ١٦سم^{٢}.

ب) حجم المكعب = (طول الضلع)^{٣} = ٦٤ سم^{٣}.

٩) الربح = الإيراد − التكلفة

= (١٠٠س) − (٠,١٥س +٢٠ س^{٢} +٣٥)

= −٢٠ س^{٢} + ٩٩,٨٥س − ٣٥

١٠) الاقتران هـ متزايد دائمًا لأنه اقتران خطي، ومعامل س موجب.

أولًا: التفسير الهندسي.

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

– يفسر المشتقة الأولى هندسيًّا.

– يستخدم تفسير المشتقة الهندسي في حل مسائل تتضمن إيجاد معادلة المماس.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

ميل المماس لمنحنى الاقتران عند نقطة ما، معادلة المماس.

التكامل الرأسي

– كتاب الرياضيات، الصف التاسع، ميل ومعادلة الخط المستقيم.

– كتاب الرياضيات، الصف الثامن، الاقتران الخطي وخصائصه.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (١١٨–١٢١).

التعلم القبلي

مفهوم المماس، ميل الخط المستقيم، معادلة الخط المستقيم، نقطة التماس، المشتقة الأولى.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر – انتقِ زميلًا – شارك).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في مفهوم القاطع والمماس عن طريق رسم منحنى الاقتران ق على اللوح، ورسم المستقيم ل قاطعًا له في النقطتين: (أ، ق(أ))،(ب،ق(ب))، ثم رسم منحنى الاقتران ق مرة أخرى، ورسم المستقيم ن مماسًّا له عند النقطة (أ، ق(أ))، ثم سؤال الطلبة:

- ماذا نسمي كلًّا من المستقيم ل، والمستقيم ن بالنسبة إلى منحنى الاقتران ق في كل حالة؟

٢– تذكير الطلبة بمعادلة الخط المستقيم وصورتها العامة ص– ص$_{١}$ = م (س– س$_{١}$)، وتوضيح أن (س$_{١}$،ص$_{١}$) نقطة تقع على المستقيم، وأن م يمثل ميل الخط المستقيم.

٣– مناقشة الطلبة في الشكل (٣–١) من الكتاب المدرسي للتوصل إلى العلاقة بين ميل المماس للمنحنى عند نقطة التماس والمشتقة الأولى للاقتران ق، ثم كتابة التعميم على اللوح.

٤– مناقشة المثال (١) على اللوح، ثم عرض أمثلة مشابهة، مع التنويع في صيغة الاقتران المعطى.
٥– توجيه الطلبة إلى حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٦– مناقشة الطلبة في المثال (٢)، وتذكيرهم أن الحل يتطلب تحديد قيم س١، ص١، وميل المماس عند النقطة (س١،ص١)، ثم تعويضها في معادلة الخط المستقيم، ثم تبسيطها في صورة ص= أس + ب.
٧– توجيه الطلبة إلى حل التدريب (٢) ضمن مجموعات ثنائية.
٨– لفت انتباه الطلبة إلى وجوب استخدام التفسير الهندسي للمشتقة في إيجاد قيم بعض المجاهيل، ثم عرض المثال (٣) على اللوح، ثم الطلب إليهم حل السؤال (٣) بصورة فردية، ثم مناقشة الحل على اللوح.
٩– تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٠– ختم الدرس بسؤال الطلبة: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟

أخطاء شائعة

يخطئ بعض الطلبة في تحديد العناصر التي يتم التعويض عنها في معادلة المماس.

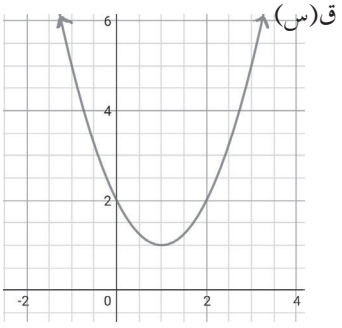
الفروق الفردية

علاج

– حل أسئلة متنوعة لإيجاد معادلة المماس في أبسط صورة، مثل إيجاد معادلة المماس لمنحنى الاقتران:
ق(س) = س^{٢} + ١ عندما س = ١

إثراء

– اعتمادًا على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى قَ(س)،
جد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عندما س= ٠



الشكل(٣–١).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.
أداة التقويم: بطاقة الخروج (٢–٦).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

الميل = قَ (٢) = ١

التدريب (٢)

ص = ٨س−٤

الأسئلة

١)

أ) ص = ٣س + ٥

ب) ص = ٥س − ٢

جـ) ص = ٢س − ٤

٢) ص = − س + ٣

٣) م = قَ (٣) = ٢٢،

ومنه:

أ = ٣

٤) م = قَ(١) = ١٣

٥) ق(−١) = ١ ، م = −٢٤ ،

ومنه:

ص = −٢٤ س − ٢٣

ثانيًا: التفسير الفيزيائي.

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

- يفسر المشتقة الأولى فيزيائيًّا.
- يفسر المشتقة الثانية فيزيائيًّا.
- يستخدم تفسير المشتقة الفيزيائي في حل مسائل عملية.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

السرعة اللحظية ع(ن)، التسارع اللحظي ت(ن)، انعدام السرعة، انعدام التسارع.

التكامل الرأسي

- التطبيقات الفيزيائية في الرياضيات لمختلف الصفوف.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (١٢٢-١٢٥).

التعلم القبلي

السرعة المتوسطة، مشتقة الاقتران، قواعد الاشتقاق، المشتقات العليا.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر – انتقِ زميلًا – شارك).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بمناقشة الطلبة في إجابة السؤال الآتي:

- يتحرك جسيم وفق العلاقة: ف(ن) = ٥ن^{٢} – ١، حيث ن: الزمن بالثواني، ف: المسافة بالأمتار. احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١، ٤] ثانية. ثم سؤال الطلبة:
- هل يمكنكم إيجاد سرعة هذا الجسيم في لحظة معينة؟

٢- الاستماع إلى إجابات الطلبة مع التبرير، ثم عرض نتاجات الدرس على اللوح.

٣- تقديم تعريف السرعة اللحظية، ثم كتابته على اللوح، وتكليف أكثر من طالب قراءته، ثم مناقشة المثال (١) لإيجاد السرعة اللحظية لجسيم في لحظة معينة.

٤- تكليف الطلبة حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشتهم في الحل، ثم كتابة الإجابة الصحيحة على اللوح.

٥- تقديم تعريف التسارع اللحظي، ثم مناقشة الطلبة في المثال (٢) لإيجاد التسارع اللحظي، ثم تكليفهم حل التدريب (٢) فرادى، ثم مناقشتهم في الحل، ثم كتابة الإجابة الصحيحة على اللوح.
٦- مناقشة الطلبة في مفهوم انعدام السرعة أو التسارع، ثم عرض المثال (٣) على اللوح لإيجاد تسارع جسيم ضمن شروط معينة للسرعة.
٧- تنفيذ نشاط (فكر) باستخدام استراتيجية (فكر- انتقِ زميلًا- شارك).
٨- تكليف الطلبة حل التدريب (٣) فرادى، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٩- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٠- ختم الدرس بتوزيع بطاقة الخروج (٢-٦) على الطلبة.

أخطاء شائعة

قد لا يميِّز بعض الطلبة بين السرعة اللحظية والسرعة المتوسطة؛ لذا وضِّح لهم الفرق بينهما.

الفروق الفردية

علاج

- يتحرك جسيم وفق العلاقة:

ف(ن)= ن^{٢} +٣، حيث ن: الزمن بالثواني، ف: المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار. جد سرعة الجسيم عندما ن= ٥

إثراء

- يتحرك جسيم وفق العلاقة:

ف(ن)= ٢ن^{٢}- ١٢ن+١٠، حيث ف: المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار، ن: الزمن بالثواني. جد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته ٤٢م/ ث.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.	أداة التقويم: قائمة الرصد (٣-١).
استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.	أداة التقويم: بطاقة الخروج (٢-٦).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

ع(٢)= ٩ م/ ث.

التدريب (٢)

ت(٢) = ٣٢م/ ث^{٢}.

التدريب (٣)

ع(٠,٥) = −١,٥ م/ ث^{٢}.

الأسئلة

١)

أ) ع(٢) = ٢٤م/ ث.

ب) ع(ن) = ٣ن^{٢} + ٦ن = ٩

٣ن^{٢} + ٦ن − ٩ = ٠

ن^{٢} + ٢ن − ٣ = ٠

(ن + ٣)(ن − ١) = ٠

ن = − ٣ (مرفوضة لأنها سالبة)

ن = ١ ثانية

ت(ن) = ٦ن + ٦ ← ت(١) = ١٢م/ ث^{٢}.

٢) السرعة المتوسطة= ٢أ، السرعة اللحظية= ٤ن، ع(٣)=١٢، ومنه:

أ = ٦

٣) ع(٤)= ٢١٦م/ ث.

٤) ن=١ثانية، ع(١)= ١م/ ث.

٥) ع(٤)= ٢٣٦ م/ ث.

أولًا: التزايد والتناقص. | **عدد الحصص:** حصتان.

النتاجات

- يتعرف العلاقة بين المشتقة الأولى ومجالات التزايد والتناقص.
- يجد مجالات التزايد والتناقص للاقتران باستخدام المشتقة الأولى.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

اختبار المشتقة الأولى، التزايد، التناقص، الثبات.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف الثامن، خصائص الاقتران الخطي.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (١٢٦-١٣٢).

التعلم القبلي

السرعة المتوسطة، إيجاد المشتقة، قواعد الاشتقاق، بحث إشارة الاقتران.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي، فكر - انتقِ زميلًا - شارك).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس برسم ثلاثة أشكال يمثل أولها خطًّا مستقيمًا متزايدًا، ويمثل ثانيها خطًّا مستقيمًا متناقصًا، ويمثل ثالثها خطًّا ثابتًا في المستوى البياني، ثم سؤال الطلبة:
   - ماذا يحدث لقيمة ص حين تزداد قيمة س في كل شكل؟
   - اقترح تعريفًا لكل من التزايد والتناقص والثبات. ثم تقديم التعريف.

٢- كتابة تعريف الاقتران المتزايد، والمتناقص، والثابت في الفترة [أ ، ب] على اللوح.

٣- رسم منحنى اقتران على اللوح، ووصف منحناه من حيث التزايد والتناقص والثبات باستخدام التعريف.

٤- تكليف الطلبة حل السؤال الثاني في الصفحة (١٣٢) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٥- توضيح العلاقة بين فترات التزايد والتناقص والثبات وإشارة المشتقة الأولى وزاوية ميل المماس، ثم تقديم النظرية.

٦- كتابة إجراءات اختبار المشتقة الأولى على اللوح، ثم تطبيقها على أمثلة متنوعة لاقترانات من الدرجة الأولى والثانية والثالثة، بدءًا بالطريقة الجزئية، ثم الطريقة الكلية، ثم تكليف الطلبة حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٧- مناقشة الطلبة في المثال (٤) على اللوح، ثم عرض أمثلة مشابهة لتحديد مجالات التزايد والتناقص من الرسم البياني، ثم مناقشة بند (فكر وناقش) في الصفحة (١٣١).

٨- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٩- ختم الدرس بسؤال الطلبة: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟

الفروق الفردية

علاج

- حدد فترات التزايد والتناقص للاقترانين الآتيين:

١) ق(س)= ٦-٣س

٢) هـ(س)= $س^{٢}$ + ٥س+٦

إثراء

- حدد موقع المماسات بالنسبة إلى منحنى الاقتران ق(س)، علمًا بأن منحنى ق متزايد لكل س أقل من صفر، ومتناقص لكل س أكبر من صفر.

أخطاء شائعة

- قد يخطئ بعض الطلبة في قراءة الرسوم الجاهزة للمشتقة؛ لذا يجب تدريبهم على تحديد فترات التزايد والتناقص باستخدام رسوم جاهزة.
- قد يخطئ بعض الطلبة في البحث في إشارة المشتقة الأولى، فلا يستطيعون تحديد فترات التزايد والتناقص لمنحنى الاقتران.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: الاختبار القصير.

استراتيجية التقويم: الملاحظة.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣-٢)، البندان: (٣)، و(٤).

التدريبات

التدريب (١)

أ) هـ(س) = ٧ + س

هـَ (س) = ١ هـ(س) متزايد على الفترة (−∞ ، ∞).

ب) ق(س) = (٢س − ٤)^{٢}

قَ(س) = ٢(٢س − ٤) × ٢، ٤(٢س − ٤) = ٠ عندما س = ٢

قَ(س) متزايد على الفترة [٢، ∞).

الأسئلة

١)

أ) قَ (س) = − ٤ ق(س) متناقص على الفترة (− ∞ ، ∞).

ب) قَ(س) = ٨ − ٢س ق(س) متزايد على الفترة (−∞ ، ٤]، ومتناقص على الفترة [٤ ، ∞).

جـ) قَ(س) = ١٢س^{٢} − ١٢س س=١، ٠

ق(س) متزايد على الفترتين: (−∞ ، ٠]، و[١، ∞)، ومتناقص على الفترة [٠، ١].

د) قَ(س) = ٢س+٥

س= −٢,٥، ق(س) متزايد على الفترة [−٢,٥ ، ∞)، ومتناقص على الفترة (−∞،−٢,٥].

٢) ق(س) متزايد على الفترة [٠ ، ٢]، ومتناقص على الفترتين (−∞، ٠] ، و[٢ ، ∞).

٣) قَ(س) = ٣س^{٢} +٢

إشارة قَ(س) موجبة على جميع الأعداد الحقيقية.

∴ ق(س) متزايد لكل قيم س.

ثانيًا: القيم القصوى. | **عدد الحصص:** حصتان.

النتاجات

- يتعرف مفهوم القيم القصوى، والنقط الحرجة، والقيمة العظمى المحلية، والقيمة الصغرى المحلية.
- يحدد النقط الحرجة لاقتران معطى.
- يستخدم اختبار المشتقة الأولى في تحديد القيم القصوى.
- يستخدم اختبار المشتقة الثانية في تحديد القيم القصوى.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

القيم القصوى، النقط الحرجة، قيمة عظمى محلية، قيمة صغرى محلية، اختبار المشتقة الأولى، اختبار المشتقة الثانية.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف التاسع، خصائص الاقتران التربيعي.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (١٣٣-١٤١).

التعلم القبلي

المشتقة الأولى، إشارة المشتقة الأولى، إشارة المشتقة الثانية، التزايد والتناقص للاقتران.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر- انتقِ زميلًا- شارك)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بتحديد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى، وتذكير الطلبة بإجراءات اختبار المشتقة الأولى، ثم كتابة نتاجات الدرس على اللوح.

٢- الاستعانة بالمثال السابق لبيان أن النقطة التي يتحول عندها الاقتران من التزايد إلى التناقص أو العكس تسمى النقطة الحرجة.

٣- مناقشة الطلبة في الشكل (٣-٩) عن طريق طرح الأسئلة الآتية:

- ما قيم س التي يكون عندها مماس الاقتران ق أفقيًّا؟
- ما قيمة المشتقة عند هذه القيم؟
- ماذا نسمي هذه النقط؟ ثم تقديم تعريف الأعداد الحرجة.
- اقترح الإجراءات المناسبة لإيجاد القيم الحرجة لاقتران (كتابة الإجراءات المتفق عليها على اللوح، ثم عرض مثال لإيجاد النقط الحرجة لاقتران كثير حدود من الدرجة الثانية).

- ما الأعداد الحرجة التي توجد فترة صغيرة مفتوحة حولها بحيث تكون ق(س) عندها أكبر من صورة أي عدد ضمن تلك الفترة؟
- ماذا يمثل الإحداثي السيني لهذه النقطة؟
- ماذا يمثل الإحداثي الصادي لهذه النقطة؟
- اقترح اسمًا لهذه النقط (تقديم تعريف القيمة العظمى المحلية، ثم تقديم تعريف القيمة الصغرى المحلية بأسلوب مماثل، وبيان أن القيم العظمى والقيم الصغرى معًا تسمى القيم القصوى).
- ما إشارة قَ(س) قبل جـ١ التي يوجد عندها قيمة عظمى محلية؟
- ما إشارة قَ(س) بعدها؟
- ما إشارة قَ(س) قبل جـ٢ التي يوجد عندها قيمة صغرى محلية؟
- ما إشارة قَ (س) بعدها؟
- كيف يمكن تحديد نوع القيم القصوى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الأولى؟

٤- تقديم اختبار المشتقة الأولى، ثم كتابة الإجراءات على اللوح، ثم عرض أمثلة الدرس على اللوح.

٥- توجيه الطلبة إلى حل التدريب (١) والتدريب (٢) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٦- تقديم اختبار المشتقة الثانية، ثم مناقشة الطلبة في المثالين (٣)، و(٤)، ثم تكليفهم حل التدريب (٣) فرادى.

٧- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٨- ختم الدرس بمراجعة النتاجات التي تم تحقيقها.

الفروق الفردية

علاج

- جد القيم القصوى (إن وُجِدت) للاقتران م(س) = س^{٢} − ٩

إثراء

- جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وُجِدت) للاقتران ق(س) = س^{٣} + ٢س^{٢} − س−٢

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة في تحليل الاقترانات من الدرجتين: الثانية، والثالثة. ولعلاج ذلك، يُراجَع الطلبة في موضوع التحليل إلى العوامل قبل شرح الدرس.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: الملاحظة.	أداة التقويم: سلم التقدير (٣-٢).
استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.	أداة التقويم: بطاقة الخروج (٢-٦).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

توجد قيمة حرجة عندما س = ١، والنقطة الحرجة هي (١ ، ٠)

وتوجد قيمة صغرى محلية عندما س=١ مقدارها ق(١) =٠

التدريب (٢)

١) ق متزايد في الفترة [−٢، ٢]، ومتناقص في الفترتين: (− ∞ ، −٢]، و[٢، ∞).

٢) توجد قيم حرجة عندما س = −٢، س = ٢

٣) عندما س = ٢ قيمة عظمى محلية مقدارها ق(٢) = ٣٢

عندما س = −٢ قيمة صغرى محلية مقدارها ق(−٢) = − ٣٢

التدريب (٣)

توجد قيمة صغرى محلية عندما س = ١هي ق(١) = ٠

وتوجد قيمة عظمى محلية عندما س = −١ هي ق(−١) = ٤

الأسئلة

١) أ) توجد قيمة عظمى محلية عندما س= −١ هي ق(−١)= ١

وتوجد قيمة صغرى محلية عندما س= ١ هي ق(١)= −١

ب) توجد قيمة عظمى محلية عندما س= ٠ هي ل(٠)= ٢

وتوجد قيمة صغرى محلية عندما س= ١ هي ق(١)= ٠

جـ) هـ(س) متزايد على ح ، إذن لا توجد قيم قصوى محلية.

د) توجد قيمة عظمى محلية = ك $\left(\frac{-٢}{٣}\right) = \frac{٢٥٦}{٢٧}$

وتوجد قيمة صغرى محلية ك(٢)= ٠

٢) أ) توجد قيمة عظمى محلية = ق (٠)= ٨

ب) توجد قيمة صغرى محلية = ق (٠)= ٤

جـ) توجد قيمة صغرى محلية = ق (٠)= −٤

وتوجد قيمة عظمى محلية = ق (−١)= ٤

٣) أ) الأعداد الحرجة: ٢، ٥

ب) ق متزايد في الفترة [٢، ٥]، ومتناقص في الفترتين: (− ∞ ، ٢]، و[٥، ∞).

جـ) توجد عندما س=٢ قيمة صغرى محلية =ق(٢)

وتوجد عندما س=٥ قيمة صغرى محلية= ق(٥).

٤) أ = ١٢

أولًا: تطبيقات على القيم القصوى. | **عدد الحصص:** ثلاث حصص.

النتاجات

– يستخدم القيم القصوى في حل مسائل تطبيقية.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

أكبر ما يمكن، أقل ما يمكن.

التكامل الرأسي

–كتاب الرياضيات، الصف العاشر، الاقترانات.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (١٤٢–١٤٨).

التعلم القبلي

تكوين المعادلات وحلها، مساحة المستطيل ومحيطه، مساحة المثلث، حجم متوازي المستطيلات، حجم المكعب.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي)، استراتيجية بوليا لحل المسألة.

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في مفهوم كل من: المحيط، والمساحة، والحجم، ثم توزيعهم إلى مجموعات، ثم رسم الأشكال الهندسية، ثم تكليف أفراد كل مجموعة كتابة جزء من القوانين للأشكال الواردة أعلاه، ثم مناقشتهم فيها.

٢– مناقشة الطلبة في المثال (١) باستخدام استراتيجية بوليا لحل المسألة الرياضية (فهم المسألة، التخطيط للحل، تنفيذ الحل، التحقق من صحة الحل أو معقوليته).

٣– عرض خطوات إيجاد القيم القصوى في المسائل، وتطبيقها بالطريقة الجزئية بناءً على المثال السابق.

٤– التوضيح للطلبة أن عبارة (أكبر ما يمكن) تعني البحث عن القيمة العظمى، ثم مراجعتهم في اختبار المشتقة الأولى واختبار المشتقة الثانية.

٥– تكليف الطلبة حل التدريب (١) ضمن مجموعات، ومتابعتهم في أثناء ذلك، ثم الاستماع إلى الإجابات، ثم مناقشتها على اللوح لاستنتاج أن حساب القيم القصوى في المسائل يتطلب تكوين علاقة ذات متغير واحد، وهي علاقة مساندة نجدها من المعطيات الوارد ذكرها في المسألة.

٦- مناقشة الطلبة في المثال (٢) عن طريق طرح الأسئلة، وتأكيد أهمية الرسم في حل المسألة.
٧- مناقشة الطلبة في بقية الأسئلة والتدريبات بالأسلوب نفسه.
٨- ختم الدرس بتكليف الطلبة حل الأسئلة بصورة فردية.

أخطاء شائعة

قد لا يميِّز بعض الطلبة بين المحيط والمساحة، ويمكن علاج ذلك باستخدام الرسم والمحسوسات، وتحديد المصطلحات التي تشير إلى كل منهما، مثل: السياج، والتبليط، وإطار الصورة.

الفروق الفردية

علاج

- ما العددان الصحيحان الموجبان اللذان مجموعهما ١٠ وحاصل ضربهما أكبر ما يمكن؟

إثراء

- أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، إذا علمت أن: أ ب = ٤ - ب جـ، فجد أكبر مساحة ممكنة لهذا المثلث.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.
أداة التقويم: سلم التقدير اللفظي (٣-٣).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

العددان: ١٠، ١٠

التدريب (٢)

الأبعاد: ٧٥م، ١٥٠م.

الأسئلة

١)

العددان: ٤٠، ٢٠

٢)

أبعاد الورقة: ٤سم، ٨سم.

٣)

أبعاد النافذة: ١,٥م، ١,٥م.

٤)

س=٢سم.

٥)

$م = \frac{١}{٢} س \times ص = \frac{١}{٢} (٤٠س - س^{٢})$

توجد قيمة عظمى عندما:

س=٢٠سم

ص=٢٠سم

∴ أكبر مساحة ممكنة للمثلث هي ٢٠٠سم^{٢}.

٦)

$م = (س + ٤)(\frac{٣٦}{س} + ٤)$

عندما س = ٦م، ص = ٦م تكون مساحة البركة أقل ما يمكن.

ثانيًا: تطبيقات اقتصادية على التفاضل.

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

– يستخدم القيم القصوى في حل مسائل اقتصادية.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

التكلفة الكلية، التكلفة الحدية، الإيراد الكلي، الإيراد الحدي، الربح، الربح الحدي.

التكامل الرأسي

– كتاب الرياضيات، الصف العاشر ، الاقترانات.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (١٤٩–١٥٣).

التعلم القبلي

الربح = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية، إيجاد القيم القصوى للاقتران.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في مفهوم كل من: الربح ، والإيراد، والتكلفة عن طريق عرض المثال الآتي ومناقشته:

اشترى أحمد ٣ أقلام، ثمن كل منها ٢٠ قرشًا، ثم باعها كلها بمبلغ ٧٥ قرشًا:

- كم قرشًا دفع أحمد ثمنًا للأقلام؟

(تقديم مفهوم التكلفة الكلية).

- بكم قرشًا باع أحمد الأقلام؟

(تقديم مفهوم الإيراد الكلي).

- كم قرشًا ربح أحمد؟ كيف عرفت ذلك؟

(تقديم مفهوم قانون الربح).

٢– عرض المسألة الوارد ذكرها في مقدمة الدرس، وبيان أن التكلفة الكلية تعتمد على جزء ثابت، وعلى جزء متغير تبعًا لعدد الوحدات المنتجة، وأن معدل تغير التكلفة بالنسبة إلى عدد الوحدات المنتجة (المشتقة الأولى لاقتران التكلفة الكلية) هو التكلفة الحدية. ثم تقديم مفهومي الإيراد الحدي والربح الحدي بالأسلوب نفسه.

٣- مناقشة الطلبة في أمثلة الدرس لاستنتاج أن عبارة (الربح أكبر ما يمكن) تعني إيجاد القيم العظمى المحلية لاقتران الربح، وأن عبارة (التكلفة أقل ما يمكن) تعني إيجاد القيم الصغرى المحلية لاقتران التكلفة، ثم تذكيرهم بإجراءات إيجاد القيم القصوى.

٤- تقسيم الطلبة إلى مجموعات، ثم الطلب إليهم حل التدريب (١)، والتدريب (٢)، ثم متابعتهم في أثناء ذلك، وتعزيز أكثر المجموعات تعاونًا التي توصَّل أفرادها إلى الإجابات الصحيحة.

٥- ختم الدرس بتوزيع بطاقة الخروج (٢-٦) على الطلبة.

الفروق الفردية

علاج

- إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س من الأجهزة أسبوعيًّا تعطى بالاقتران:

ق(س) = ٦٠٠ - ٠,٤ س + ٢٠٠ س^{٢} دينار، فجد اقتران التكلفة الحدية.

إثراء

- إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج س من الأجهزة أسبوعيًّا تعطى بالعلاقة:

ك(س)= ٢٥س+ ١٥٠، وبيع الجهاز الواحد بمبلغ ٢٨٥ دينارًا، فما عدد الوحدات التي يجب إنتاجها وبيعها أسبوعيًّا لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

أخطاء شائعة

قد لا يميِّز بعض الطلبة بين الإيراد الكلي والإيراد الناتج عن بيع قطعة واحدة باستخدام قانون الربح؛ لذا يتعيَّن تدريبهم على القراءة الدقيقة للمسائل الاقتصادية، وتبرير الإجراءات.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.	أداة التقويم: سلم التقدير اللفظي (لحل المسألة) (٣-٣).
استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.	أداة التقويم: بطاقة الخروج (٢-٦).
استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.	أداة التقويم: اختبار نهاية الوحدة.

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

عدد الوحدات التي تجعل الربح أكبر ما يمكن هو ٥ وحدات.

التدريب (٢)

يكون الربح أكبر ما يمكن عندما س= ٧٥ جهازًا.

الأسئلة

١) الربح الحدي رَ(س) = ٢س – ٨٠

٢) يكون أكبر ربح عندما س = ١٠٠ جهاز.

٣) رَ(س) = ٥٢ – ٢س

٤) يكون أكبر ربح عندما س = ٤ سلع.

٥) يكون أكبر ربح عندما س = ٢٤٨ ثلاجة.

٦) رَ(س) = ٢٠ – ٠,٤ س

إجابات أسئلة الوحدة

١) ت(٣) = ٣٦ م/ث^{٢}.

٢) م = ٢

٣) أقل تكلفة ممكنة عندما تكون أبعاد قطعة الأرض: ٥٠م، و٧٥م.

٤)

أ) الاقتران ق متزايد في الفترة [٠، ٤]، ومتناقص في الفترتين: (− ∞، ٠]، و [٤، ∞).

ب) القيمة الصغرى المحلية للاقتران ق = ق(٠) = ٠، والقيمة العظمى المحلية للاقتران ق = ق(٤)= ٣٢

٥) رَ(س) = ٦٠ − ٠,٦س

٦)

أ) يوجد للاقتران ق قيمة صغرى محلية = ق(٢) = −١٥، وقيمة عظمى محلية ق(−١) = −١٢

ب) القيمة الصغرى المحلية للاقتران ق = ق(١) = ٥، والقيمة العظمى المحلية له = ق(−١) = ٩

٧) ص =١٦س − ١٢

٨) العددان: (٢٥)، و(٢٥).

٩) كَ(٢٠) = ١٢٠ دينارًا.

١٠) س=٢، س= $\frac{٢}{٣}$.

١١)

رقم الفقرة	١	٢	٣	٤	٥	٦
رمز الإجابة الصحيحة	أ	د	ب	جـ	ب	أ

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٣-١).

النتاج: يستخدم تفسير المشتقة الفيزيائية في حل مسائل عملية.

الرقم	مؤشر الأداء	نعم	لا
١	يجد السرعة اللحظية عند زمن معطى.		
٢	يجد التسارع اللحظي عند زمن معطى.		
٣	يجد السرعة اللحظية إذا أعطي التسارع اللحظي.		
٤	يجد التسارع اللحظي إذا أعطيت السرعة اللحظية.		
٥	يستخدم مفهوم انعدام السرعة.		

استراتيجية التقويم: الملاحظة.

أداة التقويم: سلم التقدير (٣-٢).

سلم التقدير

الرقم	مؤشر الأداء	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	ضعيف
١	يجد المشتقة الأولى.				
٢	يجد النقط الحرجة.				
٣	يحدد فترات التزايد.				
٤	يحدد فترات التناقص.				
٥	يطبق اختبار المشتقة الأولى لتحديد القيم القصوى.				
٦	يطبق اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى.				
٧	يصنف القيم القصوى إلى عظمى وصغرى.				

ممتاز: إذا أنجز الطالب المهمة بصورة صحيحة، في زمن أقل من الزمن المحدد، من دون مساعدة.

جيد جدًّا: إذا أنجز الطالب المهمة بصورة صحيحة، ضمن الوقت المحدد، بمساعدة بسيطة.

جيد: إذا أنجز الطالب المهمة بصورة صحيحة، ووقت أكثر من المقرر، ومساعدة من الآخرين.

ضعيف: إذا لم ينجز الطالب المهمة بصورة صحيحة.

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: سلم التقدير اللفظي (٣-٣).

حل المسألة

الرقم	مؤشر الأداء	متميز (٤)	بارع (٣)	متدرب (٢)	مبتدئ (١)
١	يفهم المسألة، ويضع خطة للحل، وينفذها بمهارة، ويتحقق من صحة الحل.	يفهم المسألة، ويضع خطة للحل، وينفذها بمهارة، ويتحقق من صحة الحل.	يبدي فهمًا للمسألة، ويصمم خطة لحلها، وينفذها.	يبدي فهمًا للمسألة، ويصمم خطة لحلها.	لا يبدي فهمًا واضحًا للمسألة.

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: الاختبار القصير.

التزايد والتناقص

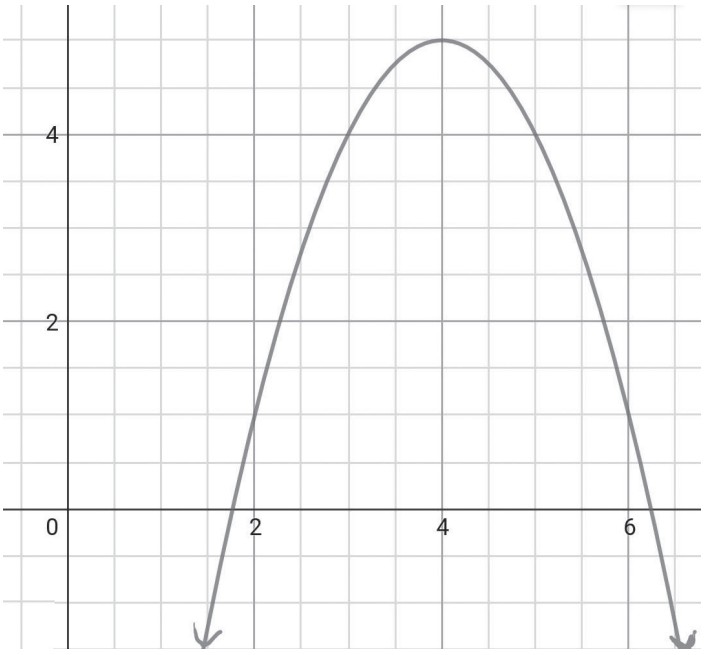
١) حدد فترات التزايد والتناقص للاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = ٦ − ٣س

ب) هـ(س) = س^{٢} + ٥س + ٦

جـ) م(س) = ٨

٢) معتمدًا الرسم الآتي الذي يمثل منحنى الاقتران ق، حدد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س).



الشكل (٣−٢).

استراتيجية التقويم: الورقة والقلم.

أداة التقويم: اختبار نهاية الوحدة.

١) يتحرك جسيم وفق العلاقة ف(ن)= ن^{٣}−١٢ن^{٢}+٨، حيث ن: الزمن بالثواني، ف المسافة التي يقطعها الجسيم بالأمتار. جد تسارع الجسيم عندما تنعدم سرعته.

٢) إذا كان ق(س) = س^{٢}(س− ٩)، فجد:

أ) فترات التزايد وفترات التناقص لمنحنى الاقتران ق(س).

ب) القيم العظمى والقيم الصغرى للاقتران ق(س) (إن وُجِدت).

جـ) قيم س الحرجة.

٣) يبيع أحد المصانع الوحدة الواحدة من سلعة معينة بسعر (٧٠) دينارًا. إذا كانت التكلفة الكلية بالدنانير لإنتاج (س) وحدة من هذه السلعة أسبوعيًّا تعطى بالعلاقة: ك(س)=٠,٦ س^{٢}+١٠س+٥٠ دينارًا، فجد الربح الحدي.

٤) باستخدام اختبار المشتقة الثانية، جد القيم العظمى والقيم الصغرى (إن وُجِدت) للاقتران:

ق(س)= س^{٣} − ٣س^{٢} − ٩س+ ٥

٥) إذا كان ق(س) = س(٤س− ٥)^{٢}، فجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عندما س=٠

٦) إذا كان ك(س) = ٦س^{٢} + ١٠ اقتران التكلفة الكلية لإنتاج س قطعة من سلعة ما، فجد التكلفة الحدية لإنتاج (١٠٠) قطعة من هذه السلعة.

٧) إذا كان ق(س) = (٢س−٣)^{٥}، فجد قيمة س التي تجعل ق(س) = ١٠

الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة

التكامل وتطبيقاته

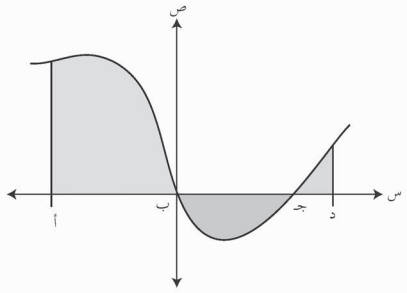
الوحدة الرابعة

٤

التكامل وتطبيقاته

يُعدُّ التكامل أحد أهم الموضوعات في الرياضيات؛ لما له من أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات العملية، ولا سيما الاقتصادية، والهندسية، والعلمية، والاجتماعية، والإنسانية. وقد بدأ دراسته دراسة عميقة في نهاية القرن السابع عشر الميلادي كوكبة من علماء الرياضيات والفيزياء، مثل الإنجليزي إسحاق نيوتن (١٦٤٢م-١٧٢٧م)، والألماني جوتفرد لبينتز (١٦٤٦م-١٧١٦م) اللذين يُعزى إليهما الفضل في اكتشاف علم التكامل، الذي توالت الدراسات المتعلقة به، واستمر التطور في تطبيقاته في جميع المجالات الحياتية والعلوم المختلفة.

تأتي دراسة التكامل في هذه الوحدة استكمالًا لدراستنا موضوع التفاضل؛ فالتفاضل والتكامل علمان متلازمان يتمم أحدهما الآخر.



Integration and its Applications

يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- استخدام قواعد التكامل في حساب تكاملات الاقترانات كثيرات الحدود، والمثلثية (جاس، جتاس، قا٢س)، والأسية الطبيعية.
- استخدام الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي في التكامل.
- تعرف التكامل المحدود، واستخدام خصائصه.
- استخدام طريقة التكامل بالتعويض في حساب تكاملات اقترانات محددة.
- استخدام التكامل في حل مسائل تتعلق بحركة جسيم على خط مستقيم، وتتضمن:
  - حساب المسافة إذا أعطيت نقطة البداية والسرعة بوصفها اقترانًا في الزمن.
  - حساب السرعة والمسافة ضمن معطيات معينة.
- نمذجة مسائل النمو والاضمحلال وحلها.
- استخدام التكامل في إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ومحور السينات.
- حساب مشتقة كل من الاقترانين: اللوغاريتمي الطبيعي، والأسي الطبيعي.

أولًا: **التكامل غير المحدود.**

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

- يتعرف مفهوم التكامل غير المحدود وعلاقته بالتفاضل.
- يتعرف خصائص التكامل غير المحدود.
- يجد التكامل غير المحدود لاقترانات معينة.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

التكامل غير المحدود ورمزه، ثابت التكامل.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصفان: العاشر والحادي عشر ، كثيرات الحدود.
- كتاب الرياضيات، الصف الحادي عشر، تبسيط التعابير الجبرية.

التعلم القبلي

كثيرات الحدود، ضرب المقادير الجبرية، تبسيط التعابير الجبرية، التفاضل.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (١٦٠-١٦٧).

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر- انتقِ زميلًا - شارك، التعلم التعاوني الجماعي)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بطرح السؤال الآتي:

- جد قاعدة الاقتران الذي تعطى مشتقته بالقاعدة: قَ (س) = ٢س + ١

٢- الاستماع إلى إجابات الطلبة، ثم مناقشتهم فيها للتوصل إلى مفهوم التكامل غير المحدود ورمزه، ثم كتابته على اللوح، ثم سؤالهم:

- ما العلاقة بين التكامل والتفاضل؟

٣- الاستماع إلى إجابات الطلبة، ثم مناقشتهم فيها.

٤- مناقشة الطلبة في المثال (١)، ثم عرض أمثلة مشابهة على اللوح، ثم الطلب إليهم حل التدريب (١) باستخدام استراتيجية (فكر- انتقِ زميلًا - شارك).

٥- التركيز على العلاقة بين التكامل والتفاضل، واستخدامها في استنتاج قواعد التكامل المحدود، بحيث يكتب المعلم تكامل العدد الثابت (أ)، ثم يسأل الطلبة: ما الاقتران الذي مشتقته تساوي (أ)؟ ثم يستمع لإجاباتهم، ثم يكتب القاعدة على اللوح. وتكرر العملية لاستنتاج قواعد التكامل غير المحدود.

٦- مناقشة الطلبة في نشاط (فكر وناقش) في الصفحة (١٦٢).

٧- مناقشة الطلبة في حل المثال (٢)، ثم توجيههم إلى حل التدريب (٢)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.

٨- مناقشة الطلبة في خصائص التكامل غير المحدود في الصفحة (١٦٣)، وذكر مثال على كل حالة، ثم الطلب إليهم ذكر أمثلة على كل قاعدة.

٩- كتابة المثال (٤) على اللوح، ثم سؤال الطلبة:

- كيف يمكن إيجاد هذا التكامل؟
- هل يتوزع التكامل في حالة الضرب؟

١٠- الاستماع إلى إجابات الطلبة، ثم مناقشتهم فيها، ثم تذكيرهم بالقواعد الخاصة بالتكامل، وأن التكامل لا يتوزع على الضرب أو القسمة.

١١- تقسيم الطلبة إلى مجموعات.

١٢- توجيه أفراد المجموعات إلى حل التدريبين (٤)، و (٥)، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٣- مناقشة الطلبة في نشاط (فكر وناقش) في الصفحة (١٦٥).

١٤- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٥- ختم الدرس بسؤال الطلبة: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟

أخطاء شائعة

قد يعتقد بعض الطلبة أن $\int$ هـ(س) ق(س) ءس = $\int$ هـ(س)ءس × $\int$ ق(س)ءس؛ لذا يجب لفت انتباههم إلى أن التكامل لا يتوزع على الضرب أو القسمة.

الفروق الفردية

علاج

– جد ناتج ما يأتي:

١) $\int ٥\ د س$ ٢) $\int س^{٣}\ د س$ ٣) $\int ٢ س (س - ١)\ د س$.

إثراء

١) جد ناتج $\int \frac{٣}{\sqrt{٨ س}} (س + ١)^{٢}\ د س$.

٢) إذا كان الاقترانان ق، قَ قابلين للاشتقاق، وكان قً(س)= ٨س – ٣، وكان قَ(٠)= ١ ق(١) =٤، فجد قاعدة الاقتران ق.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات (التقويم الذاتي). أداة التقويم: سلم التقدير (٤–١).

استراتيجية التقويم: الملاحظة. أداة التقويم: قائمة الرصد لتقويم العمل التعاوني (٢–٥).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

$$\frac{ص}{س} = \frac{-٥}{٢}$$

التدريب (٢)

١) $س + جـ$

٢) $\frac{١}{٤} س^{٤} + جـ$

٣) $\frac{-١}{٤} س^{-٤} + جـ$

٤) $\frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + جـ$

التدريب (٣)

١) $س^{٣} - ١٢ \sqrt{س} + جـ$

٢) $\frac{٤}{٢} س^{٢} - ٣ \times -$ جتاس $+ جـ = ٢س^{٢} + ٣$ جتاس $+ جـ$

التدريب (٤)

١) $\frac{٤}{٣} س^{٣} + ٦س^{٢} + ٩س + جـ$

٢) $\frac{٣}{٨} \sqrt[٣]{س^{٨}} - ٣ \sqrt[٣]{س^{٥}} + جـ$

٣) $\frac{١}{٢} س^{٢} + ٥س + جـ$

٤) $\frac{١}{٣} س^{٣} - ٢س^{٢} + ١٦س + جـ$

التدريب (٥)

$س^{٣} - ٣س^{٢} + ٥س + ٧$

الأسئلة

١) أ) $\frac{١}{٢}$ س +جـ ب) $\frac{-١}{٤س}$ +جـ

جـ) ٢س − $\frac{١}{٣}$ $س^{٣}$ +جـ د) $س^{٣}$ +جـ

هـ) $\frac{-١}{٣}$ $س^{٦}$ +جـ

٢) أ) $\frac{١٠}{٣}$ $س^{٣}$ − $\frac{٦}{٧}$ $\sqrt[٦]{س^{٧}}$ + ٣ظاس +جـ ب) $\frac{٧}{٢}$ $س^{٢}$ + ٢س − $\frac{٤}{٣}$ $س^{٣}$ +جـ

جـ) −٣جتاس +جـ د) $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ +٤س +جـ

٣) $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٤س+١}{س}$، ومنه: عندما س =٥، فإن $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٢١}{٥}$

٤) ق(س)= ٣$س^{٢}$ −٢$س^{٤}$ +٥س + ٦

٥) عَ(س)= ١٨$س^{٢}$ −٦س +٦، ومنه: عَ(١)= ١٨

٦) ق(س)= $س^{٢}$ −٥س +١٠، ومنه: ق(١)= ٦

٧) ق(س)= ٩$س^{٢}$ −٥$س^{٣}$ +$س^{٤}$ −١٣، ومنه: ق(١)= −٨

٨) ق(س)= $\frac{١}{٢}$ $س^{٢}$ + ٦س + $\frac{٨}{٣}$ $س^{٣}$ + $\frac{١٧}{٦}$

٩) ل(س) = ٢$س^{٣}$ − $\frac{٣}{٢}$ $س^{٤}$ − $س^{٢}$ + جـ

ل(٣)− ل(١) = (٥٤ − $\frac{٢٤٣}{٢}$ − ٩+ جـ) − (٢ − $\frac{٣}{٢}$ − ١+جـ)

= ٤٤ − $\frac{٢٤٠}{٢}$ = ٤٤ −١٢ = −٧٦

ثانيًا: التكامل المحدود.

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

- يتعرف مفهوم التكامل المحدود على الفترة [أ ، ب].
- يحسب التكامل المحدود لاقترانات معطاة.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

التكامل المحدود ($\int_{أ}^{ب}$)، الحد العلوي للتكامل المحدود، الحد السفلي للتكامل المحدود.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصفان: العاشر والحادي عشر، كثيرات الحدود.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (١٦٨-١٧١).

التعلم القبلي

التحليل إلى العوامل، قواعد التكامل غير المحدود.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (فكر- انتقِ زميلًا- شارك)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في قواعد التكامل المحدود.
٢- توضيح مفهوم التكامل المحدود، وعلاقة التكامل غير المحدود بالتكامل المحدود.
٣- كتابة التعريف في الصفحة (١٦٨) على اللوح، ثم تكليف بعض الطلبة قراءته.
٤- مناقشة الطلبة في المثالين (١)، و(٢)، ثم الطلب إليهم تنفيذ النشاط (فكر وناقش) في الصفحة (١٦٩).
٥- تكليف الطلبة حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٦- تقسيم الطلبة إلى مجموعات.
٧- تكليف أفراد المجموعات حل التدريبين (٢)، و(٣)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٨- تكليف أحد أفراد المجموعات عرض الحل، مستخدمًا أسلوب الحوار والمناقشة لتوضيحه.
٩- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٠- ختم الدرس بتوجيه الطلبة إلى تعبئة سجل وصف سير التعلم (١-٦).

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة عند حساب قيمة تكامل محدود بالتعويض؛ في الحد السفلي للتكامل أولًا، وطرح قيمة التعويض منه في الحد العلوي.

الفروق الفردية

علاج

١) جد قيمة $\int_{١}^{٢} (٦س^{٢} + س)\, ءس$.

٢) إذا كان ق(١) = ٤ ، ق(٥) = ١٢، فجد $\int_{١}^{٥} قَ(س)\, ءس$.

إثراء

– إذا كان ق(١) = ٤، ق(٠) = ٢، فجد $\int_{٠}^{١} \left(\frac{س^{٢} + ٦س - ٧}{س - ١} + قَ(س) \right) ءس$.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.

أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١–٦)، سلم التقدير (٤–١).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

١) = −١٢

٢) = ٦

التدريب (٢)

= ٨

التدريب (٣)

ب = ٢ ، −٢

الأسئلة

١)

أ) −١٠ ب) $\frac{-٩}{١٦}$

جـ) ٨ د) ٨

٢) م= ٤

٣) ٢٨

٤) صفر.

٥)

أ) $\frac{-٩}{٢}$ ب) $\frac{-٦٢}{٣}$

جـ) −١٢

٦) ق(٢)= −٤

ثالثًا: خصائص التكامل المحدود.

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

- يتعرف خصائص التكامل المحدود.
- يستخدم خصائص التكامل المحدود في إيجاد تكاملات معطاة.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

خصائص التكامل المحدود، الخصائص الخطية، خصيصة الإضافة.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصفان: العاشر والحادي عشر، كثيرات الحدود.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (١٧٢-١٧٧).

التعلم القبلي

التكامل غير المحدود، التكامل المحدود.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، العمل في الكتاب المدرسي)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بتوزيع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، تتألف كل منها من (٤-٦) طلاب، ثم تكليفهم حل أسئلة النشاط (١) في الصفحة (١٧٢)، ثم مناقشتهم في الإجابات، وتعزير الصحيح منها، ثم كتابة الخصائص الخطية على اللوح.

٢- مناقشة الطلبة في المثال (١)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم.

٣- تكليف أفراد المجموعات حل التدريب (١)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٤- تكليف أفراد المجموعات حل أسئلة النشاط (٢) في الصفحة (١٧٣)، ثم مناقشتهم في الإجابات، ثم كتابة الخصائص على اللوح.

٥- مناقشة الطلبة في المثال (٢)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم.

٦- تكليف الطلبة حل التدريبين (٢)، (٣)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشتهم في الإجابات على اللوح.

٧- مناقشة الطلبة في المثال (٣)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم.
٨- تكليف الطلبة حل التدريب (٤)، والتجول بينهم للإرشاد، ثم مناقشتهم في الإجابات على اللوح.
٩- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٠- ختم الدرس بتوزيع بطاقة الخروج (٢-٦) على الطلبة.

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة عند تبديل حدود التكامل، وذلك بعدم تغيير إشارة الناتج.

الفروق الفردية

علاج

- إذا كان $\int_{٢}^{٥} ق(س)\,ﻫس = ٣$، فجد $\int_{٥}^{٢} ق(س)\,ﻫس$.

إثراء

- إذا كان $\int_{-١}^{٣} ق(س)\,ﻫس = ٢$، $\int_{٣}^{٠} \left(\frac{ق(س)}{٥} + ب\right) ﻫس = ١$، $\int_{٠}^{-١} ٣ق(س)\,ﻫس = ٣٥$، فجد قيمة الثابت ب.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات (التقويم الذاتي).
أداة التقويم: سلم التقدير (٤-١)، بطاقة الخروج (٢-٦).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

١) $\frac{٢٥}{٢}$ ٢) ١٠

التدريب (٢)

١) -٣٠ ٢) ١١

التدريب (٣)

١) ١٠

التدريب (٤)

١) م $= -٢$ ٢) ن $= ٢$، ن $= ١$

الأسئلة

١)

أ) -١٨ ب) -١٠

جـ) -١٣

٢)

أ) ٨ ب) -٩

٣)

أ $= -٢$

٤)

م $= ٣$، م $= -٢$

٥)

٧ لأن $\int_{١}^{٤}$ ق(س) ﻫس $= ٢$

٦)

$(س^{٢} - س) \Big]_{ب}^{ل} = ٦$، ومنه: ل $= ٣$، ل $= -٢$

رابعًا: التكامل بالتعويض.

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

– يجد التكامل باستخدام طريقة التكامل بالتعويض.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

التكامل بالتعويض.

التكامل الرأسي

– كتاب الرياضيات، الصفان: العاشر والحادي عشر، كثيرات الحدود.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (١٧٨–١٨٤).

التعلم القبلي

قواعد الاشتقاق، التكامل المحدود.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، العمل في الكتاب المدرسي)، التعلم في مجموعات (فكر – انتقِ زميلًا – شارك، العمل التعاوني الجماعي)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في كيفية إيجاد المشتقة الأولى لاقتران معطى باستخدام قاعدة السلسلة، ثم تعرُّف طريقة حساب تكامل اقتران معطى عن طريق التكامل بالتعويض، ثم كتابة القاعدة على اللوح.

٢ – مناقشة الطلبة في المثال (١)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم، ثم سؤالهم:

- هل يمكن حل المثال بطريقة أخرى؟

٣– الاستماع إلى إجابات الطلبة، ثم مناقشتهم فيها، وتعزيز الصحيح منها.

٤– تكليف الطلبة حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.

٥– مناقشة الطلبة في المثال (٢)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم.

٦ – توزيع الطلبة إلى مجموعات غير متجانسة، تتألف كل منها من (٤–٦) طلاب.

٧– تكليف أفراد المجموعات حل التدريب (٣)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، وتعزيز أفراد المجموعات الذين أجابوا إجابة صحيحة.

٨- تكليف الطلبة حل التدريب (٤)، ثم مناقشتهم في الاستنتاج الذي توصلوا إليه، ثم عرض القاعدة في الصفحة (١٨٢) على اللوح لشرحها.

٩- مناقشة الطلبة في المثال (٣)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم، ثم تكليفهم حل التدريب (٥) فرادى، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشتهم في الإجابات على اللوح.

١٠- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١١- ختم الدرس بسؤال الطلبة: متى تستخدم طريقة التعويض في إيجاد التكامل؟ لماذا سُمِّيت طريقة التكامل بالتعويض بهذا الاسم؟

أخطاء شائعة

- قد يقوم بعض الطلبة عند إجراء التعويض في التكامل المطلوب بإبقاء المتغير الأصلي(س) مع المتغير (ص)؛ لذا يجب تنبيههم لضرورة إيجاد س بدلالة ص قبل عملية التعويض بالتكامل.
- قد يخطئ بعض الطلبة بعدم استبدال حدود التكامل عند التعويض، وتعويض حدود التكامل كما هي.

الفروق الفردية

علاج

١) جد $\int$ ٣جا(٢س + ٥) ء س.

٢) جد $\int_{-١}^{١}$ س$\sqrt{\text{س}^{٢} + ٥}$ ء س.

إثراء

- إذا علمت أن ق(١) = ٤، ق(٠) = ٢، فجد $\int_{٠}^{١} \left(\frac{٦\text{س}^{٢}}{\sqrt[٥]{(٢\text{س}^{٣} - ٢)^{٢}}} + \text{قَ}(\text{س}) \right)$ ء س.

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

$\frac{٢١}{٨}(س^{٣}+س^{٢})^{٨}+جـ$

التدريب (٢)

$\frac{-٦}{٥}$

التدريب (٣)

١) $\frac{-٣}{٨}(س^{٢}+١)^{-٤}+جـ$

٢) $-$ ظا $(١-س^{٢})+جـ$

٣) $\frac{-٦\sqrt[٣]{٤}+٣\sqrt[٣]{٢}}{٢}$

٤) $\frac{٥}{٤}(١-\sqrt[٥]{٢٥٦})$

التدريب (٤)

١) $\frac{(أس+ب)^{ن+١}}{أ(ن+١)}+جـ$، $أ\neq٠$ ، $ن\neq-١$

٢) $\frac{جا(أس+ب)}{أ}+جـ$، $أ\neq٠$

التدريب (٥)

١) صفرًا.

٢) ٣ جتا $(١-٤س)+جـ$

الأسئلة

١)

أ) ص $=$ س $-$ س^{٢}

ب) ص $=$ ٢س$^{٣}-٢$

جـ) ص $=$ س$^{٣}-$ س^{٢}

د) ص $=$ س$^{٢}-٦$س

٢)

أ) $\frac{١}{٥}\sqrt[٣]{(٣س-٢)^{٥}}+جـ$

ب) $\frac{١}{٢٤}(٢س^{٢}-٤س+١)^{٦}+جـ$

جـ) -٢ ظا$(٢-س)+جـ$

د) $\frac{-١}{٢}$ جتا$(س^{٤}+١)+جـ$

٣)

أ) $\frac{١٣}{٣}$ ب) صفرًا.

جـ) $\frac{٣}{٤}$ د) صفرًا.

٤)

-١١

٥)

-١٢

٦)

$\frac{١٩٦}{٣}$

أولًا: تطبيقات هندسية.

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

– يحل مسائل هندسية باستخدام التكامل.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

ميل المماس وعلاقته بالتكامل.

التكامل الرأسي

– كتاب الرياضيات، الصف التاسع، ميل المستقيم.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (١٨٥–١٨٨).

التعلم القبلي

ميل المماس، قواعد التكامل غير المحدود.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في ميل المماس وعلاقته بالمشتقة، وقواعد التكامل غير المحدود.

٢– طرح مسألة الدرس على اللوح، ثم سؤال الطلبة:

- كيف يمكن إيجاد قاعدة الاقتران؟

٣– الاستماع إلى إجابات الطلبة، ثم مناقشتهم فيها للتوصل إلى حل السؤال، ثم مناقشة الحل على اللوح.

٤– تقسيم الطلبة إلى (٤) مجموعات.

٥– تكليف أفراد كل مجموعة حل السؤالين (١)، و(٢) في الصفحة (١٨٨)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشتهم في الإجابات، وكتابة قاعدة كل اقتران على اللوح.

٦– مناقشة الطلبة في المثال (٢)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم.

٧– تكليف أفراد المجموعات حل التدريب (٢)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.

٨– تعيين واجب بيتي من أسئلة الدرس، ثم مناقشة الإجابات في الحصة التالية، وتكليف الطلبة حل بقية الأسئلة فرادى في الصف.

٩– ختم الدرس بسؤال الطلبة: ماذا تعلمتم في هذا الدرس؟

الفروق الفردية

علاج

- إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س، ص) يساوي $(٤س - ٢)^{٣}$، فاكتب قاعدة الاقتران ق، علمًا بأنه يمر بالنقطة (١، ٨).

إثراء

- إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{١}{س^{٢} + ٦س + ٩}$، فاكتب قاعدة الاقتران ق، علمًا بأنه يمر بالنقطة (١، ١).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات (التقويم الذاتي).	أداة التقويم: سلم التقدير (٤-١).
استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.	أداة التقويم: سلم التقدير اللفظي (٣-٣).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

$ق(س) = س^{٢} - س$

التدريب (٢)

$ق(١٤) = ١٨٥$

الأسئلة

١)

$ق(س) = ٦س - س^{٢} + \frac{٩}{٤} س^{٤} + ٥$

٢)

$ق(س) = \frac{٣}{٢} \sqrt[٣]{(س^{٢} + ٨)^{٢}} - ٢$

٣) $ق(١) = (٩)^{\circ} + ٨$

٤) $ل(س) = ٤س^{٢} - ٢س^{٣} + ٣$

٥) $هـ(٢) = -٧$

ثانيًا: **تطبيقات فيزيائية.**

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

– يحل مسائل فيزيائية باستخدام التكامل.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

التسارع، السرعة، المسافة، التكامل.

التكامل الرأسي

– التطبيقات الفيزيائية في الرياضيات لمختلف الصفوف.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (١٨٩– ١٩٢).

التعلم القبلي

السرعة، التسارع، قواعد التكامل غير المحدود.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، التدريبات والتمارين)، التعلم في مجموعات (المناقشة)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في مفهومي السرعة والتسارع، وعلاقة كل منهما بالمشتقة، وقواعد التكامل غير المحدود.

٢– عرض المثال (١) على الطلبة، ثم سؤالهم:

- كيف يمكن إيجاد موقع الجسم؟
- ماذا نعني بالموقع؟

٣– الاستماع إلى إجابات الطلبة، ثم مناقشتهم فيها للتوصل إلى حل المثال، ثم مناقشة الحل على اللوح.

٤– تقسيم الطلبة إلى (٤) مجموعات.

٥– تكليف أفراد كل مجموعة حل التدريب (١)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.

٦– مناقشة الطلبة في المثال (٢)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم.

٧– تكليف أفراد المجموعات حل التدريب (٢)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.

٨- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٩- ختم الدرس بعمل اختبار قصير.

الفروق الفردية

علاج

- يتحرك جسيم على خط مستقيم. إذا كانت سرعته بعد ن ثانية ع (ن) = (٤ن + ٨)م/ ث، فجد المسافة التي يقطعها بعد ن ثانية، علمًا بأن موقعه الابتدائي ف(٠) هو ٣م.

إثراء

- يتحرك جسيم على خط مستقيم. إذا كان تسارعه بعد ن ثانية ت (ن) = (ن + ٣) (ن +١) م/ ث^{٢}، فجد المسافة التي يقطعها بعد مرور ٣ ثوانٍ من بدء الحركة، علمًا بأن سرعته الابتدائية ع(٠) هي ٥م/ث، وموقعه الابتدائي ف(٠) هو ٢م.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات (التقويم الذاتي).

أداة التقويم: سلم التقدير (٤-١).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

١) ف(ن) = ن^{٢} + ٥ن + ٣ ، ومنه: ف(٢) = ١٧م.

٢) ف(ن) = (١ + ٢ن)^{٣} + ٤ ، ومنه: ف(١) = ٣١م.

التدريب (٢)

١) ع(ن) = ١٢ن + ٥ ، ومنه: ع(٤) = ٥٣ م/ ث.

٢) ف(ن) = ٦ن^{٢} + ٥ن + ٣ ، ومنه: ف(٣) = ٧٢ م.

الأسئلة

١)

ف(ن) = ٦ جا(٢ن − ١) + جـ ، حيث جـ ثابت.

٢)

ف(ن) = ٢ن^{٢} + ٨ن + ٢

ومنه: ف(٤) = ٦٦م.

٣)

أ) ع(ن) = − ٦(١ − ٢ن)^{٤} + ٨

ومنه: ع(١) = ٢م/ ث.

ب) ف(ن) = $\frac{٣}{٥}$ (١ − ٢ن)^{٥} + ٨ن + $\frac{١٢}{٥}$

ومنه: ف (٢) = ($\frac{٣}{٥}$ (−٣)^{٥} + ١٦ + $\frac{١٢}{٥}$)م.

٤)

أ) ف(ن) = (٤ن^{٣} − $\frac{١}{٢}$ ن^{٢} − ن + جـ) م، حيث جـ ثابت.

ب) ف(٢) = ٣٥م.

ثالثًا: المساحة.

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

– يجد مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى اقتران معين ومحور السينات باستخدام التكامل المحدود.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

مساحة المنطقة المحصورة.

التكامل الرأسي

– إيجاد مساحات الأشكال المنتظمة باستخدام قوانين محددة في الصفوف السابقة.

مصادر التعلم

– الكتاب المدرسي، الصفحات (١٩٣–٢٠٠).

التعلم القبلي

قوانين إيجاد مساحات الأشكال المنتظمة، التكامل المحدود.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في قوانين مساحة الأشكال المنتظمة (المستطيل، المثلث، الدائرة، ...).

٢– تكليف الطلبة قراءة المسألة الوارد ذكرها في بداية الدرس، ثم ربطها بموضوع التكامل لتقديم فكرة الدرس الرئيسة، وتوضيح الأشكال المرسومة في الكتاب المدرسي.

٣– مناقشة الطلبة في الأمثلة (١)، و(٢)، و(٣)، و(٤)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم.

٤– تقسيم الطلبة إلى (٦) مجموعات .

٥– تكليف أفراد كل مجموعة حل سؤال واحد من أسئلة التدريب (١)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم المقارنة بين إجابات كل مجموعة، ثم مناقشتها على اللوح، مع التركيز على أهمية فحص أصفار الاقتران، وملاحظة وجود كل صفر منها في الفترة المعطاة؛ لما يترتب عليها في أثناء الحل.

٦- تكليف أفراد المجموعات حل التدريب (٢)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.
٧- تكليف أحد أفراد المجموعات عرض إجابة مجموعته؛ لمناقشتها مع بقية المجموعات.
٨- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٩- مناقشة الطلبة في التدريب (٣) لبيان أهمية العلاقة بين المساحة والرسم البياني للمنحنى، ثم تكليفهم حل السؤال (٤) في الصفحة (٢٠٠).
١٠- ختم الدرس بتكليف الطلبة تعبئة بطاقة الخروج (٢-٦).

أخطاء شائعة

- قد يخطئ بعض الطلبة في حساب مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]، وذلك بحساب قيمة المساحة بالسالب، وهذا الخطأ ناتج عن عدم إيجاد تكامل القيمة المطلقة للاقتران، والصحيح هو إيجاد تكامل الاقتران.
- قد لا ينتبه بعض الطلبة إذا كان صفر الاقتران ق(س) ضمن الفترة المعطاة؛ فلا يقومون بتجزئة المساحة إلى تكاملين.
- قد يخطئ بعض الطلبة برسم الاقترانات من الدرجة الثانية، بحيث يرسمون جزءًا من الاقتران، وهذا الجزء قد يقطع محور السينات في نقطة واحدة، فلا يستطيعون تحديد المنطقة المراد إيجاد مساحتها؛ لذا يجب استخدام الطريقة الصحيحة لرسم منحنى الاقتران، وحل المزيد من الأمثلة.

الفروق الفردية

علاج

- احسب مساحة المنطقة المغلقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س^{٢} - ١، ومحور السينات.

إثراء

- إذا علمت أن $\int_{-٢}^{٣}$ ق(س) ﻫس = -٤ ، $\int_{٣}^{٥}$ ق(س) ﻫس = ٦،

فجد المساحة المحصورة بين الاقتران ق(س) ومحور السينات في الفترة [-٢ ، ٥].

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.	أداة التقويم: بطاقة الخروج (٢-٦)، سلم التقدير (٤-١).
استراتيجية التقويم: الملاحظة.	أداة التقويم: قائمة الرصد (٢-٥) (العمل التعاوني).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

١) ١٢ − ٤س = ٠ ⇐ ١٢ = ٤س ⇐ س = ٣ ∉ [١، ٢]

$$\int_{١}^{٢} (١٢ - ٤س)\, دس = ٦$$

المساحة المطلوبة = ٦ وحدات مربعة.

٢) ٣س^{٢} − ١٢س = ٠ ⇐ ٣س(س − ٤) = ٠

س = ٠ ∋ [٠ ، ٢]

س = ٤ ∉ [٠ ، ٢]

$$\int_{٠}^{٢} (٣س^{٢} - ١٢س)\, دس = -١٦$$

المساحة المطلوبة = |− ١٦| = ١٦ وحدة مربعة.

٣) ٦ − ٢س = ٠ ⇐ ٦ = ٢س ⇐ س = ٣ ∋ [١، ٤]

$$\int_{١}^{٣} (٦ - ٢س)\, دس = ٤$$

$$\int_{٣}^{٤} (٦ - ٢س)\, دس = -١$$

المساحة المطلوبة = |٤| + |−١| = ٤ + ١ = ٥ وحدات مربعة.

التدريب (٢)

$س^{٢} - ٢س - ٣ = ٠ \Leftarrow (س - ٣)(س + ١) = ٠$

$س = ٣ ، س = -١$

$$\int_{-١}^{٣} (س^{٢} - ٢س - ٣)\, ﻫس = \frac{-٣٢}{٣}$$

المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{٣} |ق(س)|\, ﻫس = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

التدريب (٣)

١) $\int_{أ}^{ب} ق(س) . ﻫس = -م_{١} = -٨$؛ لأن المساحة $م_{١}$ تقع تحت محور السينات.

٢) $\int_{ب}^{جـ} ق(س) . ﻫس = -م_{٢} = ٥$؛ لأن المساحة $م_{٢}$ تقع فوق محور السينات.

٣) $\int_{أ}^{جـ} ق(س) . ﻫس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\, ﻫس + \int_{ب}^{جـ} ق(س)\, ﻫس$

$= -٨ + ٥ = -٣$

٤) $م_{١} + م_{٢} = \int_{أ}^{ب} |ق(س)|\, ﻫس + \int_{ب}^{جـ} |ق(س)|\, ﻫس$

$= ٨ + ٥ = ١٣$ وحدة مربعة.

الأسئلة

١) أ) $\int_{-١}^{٢} ١٢ . ﻫس = ٣٦$

المساحة المطلوبة $= ٣٦$ وحدة مربعة.

ب) $٥ - ٢س = ٠ \Leftarrow ٥ = ٢س \Leftarrow س = \frac{٥}{٢} \notin [-٢، ٢]$

$$\int_{-٢}^{٢} (٥ - ٢س)\, ﻫس = ١٢$$

المساحة المطلوبة $= ١٢$ وحدة مربعة.

جـ) ٣س^{٢} −٣ = ٠ ⇐ ٣س^{٢} = ٣ ⇐ س^{٢} = ١ ⇐ س = ١، −١ ∉ [−٤، −٢]

$\int_{-٤}^{-٢}$ (٣س^{٢} −٣) . ىس = ٥٠

المساحة المطلوبة = $\int_{-٤}^{-٢}$ | ق(س)| ىس = ٥٠ وحدة مربعة.

٢) أ) ٦− ٦س^{٢} = ٠ ⇐ ٦ = ٦ س^{٢} ⇐ س^{٢} = ١ ⇐ س = −١، ١

−١∈ [−٢، ٠] ، ١∉ [−٢، ٠]

$\int_{-٢}^{-١}$ (٦− ٦س^{٢}). ىس = − ٨

$\int_{-١}^{٠}$ (٦− ٦س^{٢}). ىس = ٤

المساحة المطلوبة = $\int_{-٢}^{٠}$ | ق(س) | . ىس = ٨ + ٤ = ١٢ وحدة مربعة.

ب) ٤س^{٣} = ٠⇐س = ٠ ∈ [−١، ١].

$\int_{-١}^{٠}$ ٤س^{٣}. ىس = −١

$\int_{٠}^{١}$ ٤س^{٣}. ىس = ١

المساحة المطلوبة = $\int_{-١}^{١}$ | ق(س) | . ىس = ١ + ١ = ٢ وحدة مربعة.

جـ) ٣س^{٢} − ٤٨ = ٠⇐ ٣س^{٢} = ٤٨ ⇐ س^{٢} = ١٦ ⇐ س = ٤، −٤

٤∈ [٣، ٥] ، −٤∉ [٣، ٥]

$\int_{٣}^{٤}$ (٣س^{٢} − ٤٨). ىس = −١١

$\int_{٤}^{٥}$ (٣س^{٢} − ٤٨). ىس = ١٣

المساحة المطلوبة = $\int_{٣}^{٥}$ | ق(س) | ىس = ١١ + ١٣ = ٢٤ وحدة مربعة.

د) $-س^{٢} - ٤ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = -٤ \Leftarrow$ لا توجد قيمة حقيقية تحقق $س^{٢} = -٤$

$$\int_{-١}^{١} (س^{٢} - ٤)\,ﻫس = \frac{-٢٦}{٣}$$

المساحة المطلوبة $= \int_{-١}^{١} |ق(س)|\,ﻫس = \frac{٢٦}{٣}$ وحدة مربعة.

٣) أ) $٤س - س^{٢} = ٠ \Leftarrow س(٤ - س) = ٠ \quad س = ٠ ، ٤$

$$\int_{٠}^{٤} (٤س - س^{٢})\,ﻫس = \frac{٣٢}{٣}$$

المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٤} |ق(س)|\,ﻫس = \frac{٣٢}{٣}$ وحدة مربعة.

ب) $٤س^{٣} - ١٢س^{٢} = ٠ \Leftarrow ٤س^{٢}(س - ٣) = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، س = ٣$

$$\int_{٠}^{٣} (س^{٣} - ١٢س^{٢})\,ﻫس = -٢٧$$

المساحة المطلوبة $= \int_{٠}^{٣} |ق(س)|\,ﻫس = ٢٧$ وحدة مربعة.

٤) $\int_{-٥}^{٣} ق(س)ﻫس = \int_{-٥}^{٠} ق(س)ﻫس + \int_{٠}^{٣} ق(س)ﻫس$

$= م_{١} + |-م_{٢}| = ١٣ + |-٣| = ١٠$

$م_{١}$ تقع فوق محور السينات ، $م_{٢}$ تقع تحت محور السينات

٥) مساحة النافذة $= \int_{-١}^{١} (١ - س^{٢})ﻫس = \frac{٤}{٣}$ م^{٢}

التكلفة الكلية = المساحة × تكلفة المتر المربع

$= \frac{٤}{٣} \times ٥ = \frac{٢٠}{٣}$ دينار.

أولًا: **الاقترانان اللوغاريتمي الطبيعي والأسي الطبيعي.** **عدد الحصص:** ثلاث حصص.

النتاجات

- يتعرف الاقترانين اللوغاريتمي الطبيعي، والأسي الطبيعي.
- يجد مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي.
- يجد مشتقة اقتران الأسي الطبيعي.
- يجد تكامل اقتران الأسي الطبيعي.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

اللوغاريتم الطبيعي، الأسي الطبيعي.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف الحادي عشر، اللوغاريتمات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٢٠١ – ٢٠٩).

التعلم القبلي

قوانين اللوغاريتمات، التكامل بالتعويض، قواعد الاشتقاق.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي، فكر– انتقِ زميلًا– شارك)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بكتابة العنوان على اللوح، ثم سؤال الطلبة عن توقعاتهم عمّا سيتعلمون في هذا الدرس، ثم الاستماع إلى إجاباتهم، وتعزيزها.

٢– توضيح مفهوم اقتران اللوغاريتم الطبيعي عن طريق ربطه بمساحة المنطقة المحصورة بين ص = $\frac{١}{ع}$، ع = ١، ع = س، ومحور السينات.

٣– كتابة التعريف الوارد ذكره في الصفحة (٢٠٢)، ثم توضيحه للطلبة.

٤– كتابة النظرية على اللوح، ثم استخدام أسلوب الحوار والمناقشة والتبرير المنطقي في توضيحها.

٥ – مناقشة الطلبة في المثال (١)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم.
٦– توزيع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم الطلب إليهم حل التدريب (١)، والتدريب (٢)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.
٧– تكليف أفراد المجموعات حل التدريب (٤)، ثم مناقشتهم في الإجابات، وتوضيح الاستنتاج الذي توصلوا إليه، ثم كتابة النظرية الوارد ذكرها في صفحة (٢٠٤) على اللوح لشرحها.
٨ – مناقشة الطلبة في المثال (٢)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم، ثم تكليفهم حل التدريب (٥)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.
٩– كتابة النظرية الوارد ذكرها في صفحة (٢٠٦) على اللوح، ثم الطلب إلى الطلبة قراءتها.
١٠– مناقشة الطلبة في المثال (٣)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم.
١١– توزيع الطلبة إلى مجموعات رباعية، ثم تكليفهم حل التدريب (٧)، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.
١٢– كتابة النظرية الوارد ذكرها في صفحة (٢٠٧) على اللوح، ثم تكليف أكثر من طالب قراءتها.
١٣– مناقشة الطلبة في المثال (٤)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم.
١٤– تكليف الطلبة حل التدريب (٩) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.
١٥– تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٦– ختم الدرس بسؤال الطلبة عن قواعد الاشتقاق وقواعد التكامل التي تعلموها في الدرس.

الفروق الفردية

علاج

١) إذا كان ق(س)= $\frac{٢}{س}$ + لـو$_{هـ}$ س ، حيث س > ٠ ، فجد قَ(س).

٢) جد $\int$ ٣ هـ^{س} ى س.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل.
أداة التقويم: قائمة الرصد (٤–٢).

التدريبات

التدريب (١)

ص = لـــو$_{هـ}$ م(س) = ق(س)

نفرض أن ع = م(س)

ص = لـــو$_{هـ}$ ع ، ع = م(س).

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{ع}$ ، $\frac{د ع}{د س} = م'(س)$

وبحسب قاعدة السلسلة، فإن:

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \times \frac{د ع}{د س}$

ومنه:

$ق'(س) = \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{ع} \times م'(س)$

$\therefore \quad ق'(س) = \frac{م'(س)}{م(س)}$.

التدريب (٢)

١) $ق'(س) = \frac{-جاس}{جتاس} = -ظاس$

٢) $ق'(س) = \frac{\frac{-٢}{س^{٢}}}{\frac{٢}{س}} = \frac{-٢}{س^{٢}} \times \frac{س}{٢} = \frac{-١}{س}$ ، س > .

٣) $ق'(س) = \frac{٣س^{٢}}{س^{٣} + ٨}$

التدريب (٣)

$ق'(س) = \frac{أ}{أس + ٣}$

$ق'(-٢) = ١ \Leftarrow \frac{أ}{-٢أ + ٣} = ١ \Leftarrow أ = ١$

التدريب (٤)

– عندما س > ٠ ، | س | = س

ق(س) = لـــوهـ (س) ⇐ قَ(س) = $\frac{١}{س}$

– عندما س < ٠ ، | س | = – س

ق(س) = لـــوهـ (–س) ⇐ قَ(س) = $\frac{-١}{-س}$ = $\frac{١}{س}$.

∴ قَ(س) = $\frac{١}{س}$ حيث ق(س) = لـــوهـ | س | ، س ≠ ٠

التدريب (٥)

١) $\int \frac{١}{س}$ ءس = –٣ لـــوهـ | س | + جـ

٢) $\int$ ٢(٣س^{٢} – ٢) (س^{٣} – ٢س + ١)$^{-١}$ ءس = ٢لـــوهـ | س^{٣} – ٢س + ١ | + جـ

التدريب (٦)

ق(س) = ص = هـ$^{ل(س)}$

نفرض أن ع = ل(س).

ص = هـ^{ع} ، ع = ل(س).

$\frac{ءص}{ءع}$ = هـ^{ع} ، $\frac{ءع}{ءس}$ = لَ(س).

وبحسب قاعدة السلسلة، فإن:

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$

ومنه:

قَ(س) = $\frac{ءص}{ءس}$ = هـ^{ع} × لَ(س) = لَ(س) × هـ$^{ل(س)}$

التدريب (٧)

١) صَ = $-٢س \times هـ^{-س^{٢}}$

٢) صَ = $-٢جا٢س \times هـ^{جتا٢س}$

٣) صَ = $هـ^{س} \times \frac{١}{س} + لـــو_{هـ} س \times هـ^{س}$ (بحسب قاعدة مشتقة ضرب اقترانين).

٤) صَ = $\frac{٣(س^{٢}+١)هـ^{٣س} - (هـ^{٣س})(٢س)}{(س^{٢}+١)^{٢}}$ (بحسب قاعدة مشتقة قسمة اقترانين).

التدريب (٨)

$\int هـ^{أس+ب} \cdot ىس$

نفرض أن ص = أس + ب

$\frac{ىص}{ىس} = أ$

$ىص = أ ىس$

$\int هـ^{أس+ب} ىس = \int هـ^{ص} \frac{ىص}{أ}$

$= \frac{١}{أ} \times هـ^{ص} + جـ$

$= \frac{هـ^{أس+ب}}{أ} + جـ ، أ \neq ٠$

التدريب (٩)

١) $\frac{١}{٢} هـ^{س} + جـ$ ٢) $\frac{-١}{١٨} \times هـ^{-١-٦س} + جـ$

٣) $هـ^{س^{٣}+٢س^{-١}} + جـ$ ٤) $٣ هـ^{٢س^{-١}} + جـ$

الأسئلة

١)

أ) قَ(س) = $\frac{-١}{س^{٢}} + \frac{١}{س} + ١٤ هـ^{٧س}$.

ب) قَ(س) = $\frac{٣}{س} + ٤ هـ^{٣س^{-٢}} - ٢س$.

جـ) قَ(س) = $هـ^{س}$ جتاس + $\frac{٢ جاس}{جتاس}$

٢)

أ) $٢هـ^{س} - لـو_{هـ}|س| + س^{٣} + جـ$.

ب) $١٢هـ^{١+٢س} + جـ$.

جـ) $- هـ^{١-س^{٢}} + جـ$ (تكامل بالتعويض).

د) $٥ لـو_{هـ}|س| - هـ^{٣س} - ٤س + جـ$.

هـ) $٤ لـو_{هـ}|س^{٢} + ٤| + جـ$.

٣)

ق(س) = $٢هـ^{س} + س^{٢} + جـ$.

٤)

ف(ن) = $هـ^{ن+١} + ٨ لـو_{هـ} ن + جـ$، حيث جـ ثابت.

ثانيًا: النمو والاضمحلال.

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

- يتعرف مفهوم كل من: النمو، والاضمحلال.
- يحل مسائل عملية عن النمو والاضمحلال.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

النمو والاضمحلال، معامل النمو، معامل الاضمحلال، معادلة النمو والاضمحلال.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف الحادي عشر، اللوغاريتمات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٢٠١ – ٢٠٩).

التعلم القبلي

قوانين اللوغاريتمات، التكامل بالتعويض، قواعد الاشتقاق.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (المناقشة)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بكتابة العنوان على اللوح، ثم سؤال الطلبة عن توقعاتهم عمّا سيتعلمون في هذا الدرس، ثم الاستماع إلى إجاباتهم، وتعزيزها.

٢– توجيه الطلبة إلى قراءة المسألة الوارد ذكرها في بداية الدرس، ثم توضيح مفهوم النمو ومفهوم الاضمحلال.

٣– شرح طريقة التوصل إلى معادلة النمو والاضمحلال، ثم كتابتها على اللوح، ثم توضيح دلالات رموز المعادلة، والفرق بين معامل النمو ومعامل الاضمحلال.

٤– مناقشة الطلبة في حل المثالين (١)، و(٢)، وتوجيه الأسئلة إليهم في كل خطوة للتحقق من فهمهم.

٥– تكليف الطلبة حل التدريبين (١)، و(٢) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية

الراجعة لهم، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.

٦- مناقشة الطلبة في حل المثال (٢)، ثم توجيههم إلى حل مسألة الدرس في دفاترهم، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٧- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُـحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٨- ختم الدرس بسؤال الطلبة عن الفرق بين النمو والاضمحلال، ثم الطلب إليهم تعبئة سجل وصف سير التعلم.

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة بوضع معامل الاضمحلال موجبًا في حالة الاضمحلال؛ لذا يجب تنبيههم على أن معامل الاضمحلال يكون سالبًا، وحل المزيد من الأسئلة.

الفروق الفردية

علاج

١) يتناقص ثمن آلة تشغيل بمرور الزمن بصورة منتظمة وفق قانون الاضمحلال بمعدل ١٠٪ سنويًّا. إذا كان ثمن الآلة الأصلي ٥٤٠ دينارًا، فما ثمن الآلة بعد مرور ٥ سنوات؟

٢) يتزايد عدد سكان بلدة ما بانتظام واستمرار وفق قانون النمو بمعدل ٢٪ سنويًّا. إذا كان عدد سكان البلدة ٣٠ ألف نسمة عام ٢٠٠٠م، فكم سيبلغ عدد سكانها عام ٢٠٣٠م؟

إثراء

١) تصب حنفية في خزان ماء، وتزداد كمية الماء بحسب قانون النمو. إذا زادت كمية الماء من ٤٠٠ لتر إلى ١٢٠٠ لتر خلال ساعتين، فكم لترًا من الماء يتجمع في الخزان بعد مرور ٦ ساعات على فتح الحنفية؟

٢) يزيد سعر أرض بمرور الزمن بصورة منتظمة وفقًا لقانون النمو. إذا اشترى فراس قطعة أرض بمبلغ ٤٠٠٠ دينار، ثم أصبح سعرها ٤٨٠٠ دينار بعد ٣ سنوات، فكم يصبح سعر الأرض بعد مرور ٦ سنوات؟

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٤-٢).

التدريبات

التدريب (١)

$ع_{١} = ١٠٠٠٠$ ، أ $= ٤٪ = \frac{٤}{١٠٠}$، ن $= ٢٥$ سنة.

$ع(٢٥) = ١٠٠٠٠ \times هـ^{٢٥ \times ٠,٠٤}$

$= ٢٧٠٠٠$ دينار.

التدريب (٢)

$ع_{١} = ٨٠٠٠٠$، أ $= -٥٪ = \frac{-٥}{١٠٠}$، ن $= ٤٠$

$ع(٤٠) = ٨٠٠٠٠ \times هـ^{-٤٠ \times ٠,٠٥}$

$= \frac{٨٠٠٠٠}{(٢,٧)^{٢}}$ دينار.

الأسئلة

١) $ع_{١} = ٥٠٠٠٠٠$ ، أ $= ٢٠٠٪ = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = ٢$، ن $= \frac{١}{٢}$ ساعة.

$ع(\frac{١}{٢}) = ٥٠٠٠٠٠ \times هـ^{\frac{١}{٢} \times ٢} = ١٣٥٠٠٠٠$ عدد البكتيريا بعد نصف ساعة.

٢) $ع_{١} = ١٢٥٨٠$ ، أ $= -٨٪ = \frac{-٨}{١٠٠}$، ن $= ٢٥$ سنة.

$ع(٢٥) = ١٢٥٨٠ \times (٢,٧)^{\frac{-٨}{١٠٠} \times ٢٥}$

$= \frac{١٢٥٨٠}{(٢,٧)^{٢}}$ دينار.

٣)

ع$_{١}$ = ١٠ ، ع($\frac{١}{٤}$) = ٥

ع($\frac{١}{٤}$) = ع$_{١}$ × هـ^{أن}

٥ = ١٠ × هـ$^{\frac{١}{٤}أ}$

$\boxed{\frac{١}{٢} = هـ^{\frac{١}{٤}أ}}$

ن = $\frac{١}{٤}$ ١ = $\frac{٥}{٤}$ ساعة.

ع($\frac{٥}{٤}$) = ع$_{١}$ × هـ^{أن} = ١٠ × هـ$^{\frac{٥}{٤}أ}$

= ١٠ × (هـ$^{\frac{أ}{٤}}$)^{٥} = ١٠ × ($\frac{١}{٢}$)^{٥} = $\frac{١٠}{٣٢}$ = $\frac{٥}{١٦}$ كغم.

٤)

أ = ٠,٨٪ = $\frac{٨}{١٠٠٠}$ ، ع(٠) = ٦٠٠٠٠٠ عام ٢٠١٠م.

ن = ٢١٣٥ − ٢٠١٠ = ١٢٥ عامًا.

ع(ن) = ع$_{.}$ × هـ^{أن}

ع(١٢٥) = ٦٠٠٠٠٠ × (٢,٧)$^{\frac{٨}{١٠٠٠} \times ١٢٥}$

= ٦٠٠٠٠٠ × (٢,٧)^{١} = ١٦٢٠٠٠٠ نسمة.

إجابات أسئلة الوحدة

(١)

أ) $\frac{ د ص}{ د س} = \frac{٤س - ١}{س^{٢} + ٥}$.

ب) $\frac{ د ص}{ د س}$ = صفرًا ؛ لأن ص = ثابتًا (تكامل محدود).

جـ) $\frac{ د ص}{ د س}$ = ظا (٤ + س).

د) $\frac{ د ص}{ د س}$ = صفرًا.

هـ) $\frac{ د ص}{ د س} = \frac{٢س}{س^{٢} + ٦} - ٢هـ^{٢س^{-١}} + ٣س^{٢}$. و) $\frac{ د ص}{ د س}$ = جاس × $\frac{١}{س}$ + لـــو$_{هـ}$ س × جتاس.

(٢)

قَ(س) = ٤س × هـ$^{٢س^{٢-١}}$

قً(س) = ٤س × ٤س × هـ$^{٢س^{٢-١}}$ + هـ$^{٢س^{٢-١}}$ × ٤

قً(س) = ٤هـ$^{٢س^{٢-١}}$ (٤س^{٢} + ١).

(٣)

قَ(٢) = −٤

(٤)

أ) $\frac{٣}{٨}$ $\sqrt[٣]{س^{٨}}$ − $\frac{٢١}{٥}$ $\sqrt[٣]{س^{٥}}$ + جـ

ب) س^{٦} + جـ

جـ) $\frac{١}{٣}$ س^{٣} − ٤س + جـ

د) $\frac{(٣س + ٢)^{٣}}{٩}$ + جـ

هـ) $\frac{(س^{٢} - س)^{٦}}{٦}$ + جـ

و) $\frac{٢}{٣}$ $\sqrt{س^{٣} + ١}$ + جـ

ز) ٢ لـــو$_{هـ}$ | س | − هـ^{س} + ٣س + جـ

ح) ٣ لـــو$_{هـ}$ (س^{٤} + ٣) + جـ

ط) ٣هـ$^{س^{٢} + ٥}$ + جـ

ي) ظا (س^{٢} + س) + جـ

٥)

أ) $\frac{٩}{٢}$ ب) ٣هـ

جـ) $\frac{-٥}{٤}$ د) ٦

هـ) $-لـــو_{هـ}٧$ و) ٢ -٢هـ

ز) ٨

٦)

$-ب + ٣ = ب^{٢} + ب \Leftarrow ب = -٣ ، ب = ١$

٧)

$\int_{-١}^{٠} ق(س)\, ىس = ٢$

أ) -٢ ب) -٢

جـ) ٣٦

٨)

أ) ب= $\frac{٣}{٢}$ ب) ب = ٤ ، ب = -٣

جـ) ب = -٣ د) ب = -٣ ، ب=١

٩)

$س^{٣} + \frac{٥}{٢} س^{٢} + ٢س - ٢٣$

١٠)

$٣س^{٢} - ٢٧ = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ٩ \Leftarrow س = -٣، ٣$

$-٣ \ni [-٤، ٠] ، ٣ \notin [-٤، ٠]$

$\int_{-٤}^{-٣} (٣س^{٢} - ٢٧)\, ىس = ١٠$

$\int_{-٣}^{-٢} (٣س^{٢} - ٢٧)\, دس = -٥٤$

المساحة المطلوبة $= \int_{-٤}^{٥} |ق(س)|\, دس = ١٠ + ٥٤ = ٦٤$ وحدة مربعة.

(١١

أ) ع(٤) $= -١٥٧$ م/ ث.

ب) ٨م.

١٢) ع $= ٣٠٠٠$ ، أ $= ٢,٥٪ = \frac{٢٥}{١٠٠٠}$ ، ن $= ٨٠$ سنة.

ع(٨٠) $= ٣٠٠٠ \times (٢,٧)^{\frac{٢٥}{١٠٠٠} \times ٨٠}$

$= ٨١٠٠$ دينار.

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات (التقويم الذاتي).

أداة التقويم: سلم التقدير (٤ – ١).

النتاج: أمتلك المعارف والمهارات المطلوبة في التكامل.

الرقم	مؤشر الأداء	ممتاز	متوسط	مقبول
١	**التكامل غير المحدود** – أجد التكامل غير المحدود لاقتران معطى.			
٢	**التكامل المحدود** – أجد التكامل المحدود لاقتران معطى.			
٣	**خصائص التكامل المحدود** –أطبق خصائص التكامل في إيجاد التكامل.			
٤	**التكامل بالتعويض** – أكامل باستخدام التعويض.			
٥	**تطبيقات التكامل** – أحل مسائل هندسية باستخدام التكامل. – أحل مسائل فيزيائية باستخدام التكامل. – أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى اقتران معين ومحور السينات باستخدام التكامل المحدود.			

ممتاز: إذا أنجز الطالب المهمة بصورة صحيحة، من دون مساعدة.

متوسط: إذا أنجز الطالب المهمة بوجود خطأ بسيط.

مقبول: إذا أنجز الطالب المهمة بوجود أخطاء.

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٤ – ٢).

النتاج: يمتلك المعارف والمهارات المطلوبة في التكامل، والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي، والاقتران الأسي الطبيعي.

الرقم	مؤشر الأداء	يتقن	لا يتقن
١	يجد مشتقة اقتران لوغاريتمي طبيعي.		
٢	يجد مشتقة اقتران أسي طبيعي.		
٣	يجد تكامل اقتران أسي طبيعي.		
٤	يستخدم الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي في التكامل.		
٥	يحل مسائل عملية تتعلق بالنمو والاضمحلال.		

الوحدة الخامسة

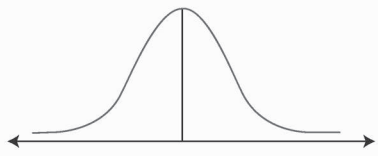
الإحصاء والاحتمالات

٥

الإحصاء والاحتمالات

Statistics and Probability

يُعَدُّ علم الإحصاء والاحتمالات أحد فروع الرياضيات التي لا يمكن الاستغناء عنها؛ نظرًا إلى تطبيقاتها المتعددة في مختلف مجالات الحياة، ولا سيما الهندسية، والعلمية، والاجتماعية، والاقتصادية، والطبية، والإدارية، ولهذا فإن تعلم أساسياتها يُعَدُّ مدخلًا مهمًّا لفهم الكثير من الظواهر الطبيعية في العالم المحيط بنا.



يتوقع من الطالب بعد دراسة هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:

- تعرف مبدأ العد، واستخدامه في حل مسائل حياتية.
- استقصاء التباديل والتوافيق ومضروب العدد الصحيح غير السالب باستخدام مبدأ العد، وحل مسائل عملية على ذلك.
- فهم العلامة المعيارية وعلاقتها بالعلامة الخام.
- حساب العلامة المعيارية للعلامة الخام، وتفسيرها.
- استقصاء خصائص التوزيع الطبيعي، والإفادة منها في حل مسائل عملية.
- تحديد طبيعة الارتباط بين متغيرين عن طريق شكل الانتشار.
- حساب قيمة معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين، وتفسير دلالات قيمته عن طريق شكل الانتشار.
- تحديد معادلة خط الانحدار للارتباط بين متغيرين.
- تطبيق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين، وتحديد الفرق بين القيمة المفترضة والقيمة المتنبأ بها.
- فهم المتغير العشوائي المنفصل، وتوزيع ذي الحدين.

تهيئة

١) جد المتوسط الحسابي للمشاهدات الآتية:

٢، ٦، ١٠ ، ١١ ، ٢١

٢) حل المعادلة الآتية:

٢س + ٥= ١١

٣) إذا كانت ص = ٤س− ٠,٥ ، فجد قيمة ص إذا كانت س = ٢

٤) ثلاثة أعداد متتالية، حاصل ضربها يساوي ٦٠، ما هذه الأعداد؟

٥) اكتب الفضاء العيني لتجربة إلقاء ثلاث قطع نقدية مرة واحدة.

٦) عائلة لديها ثلاثة أطفال:

أ) ما احتمال وجود طفلين ذكرين فقط في العائلة؟

ب) ما احتمال وجود بنت واحدة على الأقل في العائلة؟

جـ) ما احتمال عدم وجود أي طفل ذكر في العائلة؟

٧) ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة في ما يأتي:

(١) مجموع انحرافات القيم عن متوسطها الحسابي هو:

أ) ١ ب) صفر جـ) − ١

(٢) العلاقة بين سرعة إحدى السيارات وزمن الوصول إلى الهدف:

أ) طردية ب) عكسية جـ) لا توجد علاقة

(٣) قيمة احتمال حادث ما دائمًا هي:

أ) ل(ح) > صفر ب) ل(ح) <١ جـ) ٠ ≤ ل(ح) ≤١

إجابات أسئلة التهيئة

١)

$\frac{٦٠}{٥} = ١٢$

٢)

س = ٣

٣)

ص = ٧,٥

٤)

٣، ٤، ٥

٥)

$\Omega = \{$ ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ص ك ك ، ك ص ص ، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك $\}$

٦)

أ) $\frac{٣}{٨}$ ب) $\frac{٧}{٨}$ جـ) $\frac{١}{٨}$

٧)

١	٢	٣
ب	ب	جـ

أولًا: مبدأ العد.

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

- يتعرف مبدأ العد.
- يستخدم مبدأ العد في حل مسائل حياتية.
- يتعرف مفهوم مضروب العدد.
- يجد مضروب عدد صحيح غير سالب.
- يستخدم مضروب العدد في حل مسائل حياتية.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

مبدأ العد، مضروب العدد، ن!

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف العاشر، وحدة الإحصاء والاحتمالات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٢٢٠- ٢٢٨).

التعليم القبلي

حل معادلات خطية وتربيعية.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي)، حل المشكلات والاستقصاء، التعلم في مجموعات (فكر- انتقِ زميلًا - شارك).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بذكر مقدمة بسيطة عن موضوع الإحصاء والاحتمالات، وأهميتها لموضوعات المعرفة الرياضية وتطبيقاتها في الحياة.

٢- كتابة عنوان الدرس والنتاجات على اللوح، وحفز الطلبة إلى فهم الدرس ببيان أهميته في الحياة الواقعية.

٣- طرح السؤال الآتي على الطلبة:

- إذا شُكِّل فريق كرة القدم من طلبة صفك للمشاركة في بطولة دوري المدرسة، وتَعيَّن على الفريق أن يلعب مباراتين فقط، فما النتيجة التي تتوقع أن يحرزها الفريق في المباراتين، علمًا بأن نتيجة المباراة إمّا فوز، وإمّا خسارة، وإمّا تعادل؟

٤- الاستماع إلى إجابات الطلبة، ثم كتابة النتائج المتوقعة على اللوح.

٥- طرح الأسئلة الآتية على الطلبة:

- ما عدد النتائج في المباراتين؟
- ما عدد نتائج المباراة الأولى فقط؟
- ما عدد نتائج المباراة الثانية فقط؟
- ما العلاقة بين عدد النتائج الكلي وعدد النتائج في كل مرة؟
- ماذا تستنتج؟

٦- كتابة الاستنتاج بخط واضح على اللوح، والتوضيح للطلبة أن ذلك يسمى مبدأ العد.

٧- مناقشة الطلبة في أمثلة متنوعة على مبدأ العد.

٨- حل المثال (١) بمشاركة الطلبة، ثم الطلب إليهم تنفيذ نشاط (فكر وناقش) الذي يلي المثال.

٩- تكليف الطلبة حل التدريب (١) بصورة فردية، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٠- مناقشة الطلبة في المثال (٢).

١١- تكليف الطلبة حل التدريب (٢) ضمن مجموعات ثنائية.

١٢- تكليف الطلبة قراءة المثال (٣)، ثم سؤالهم عن عدد طرائق اختيار المشتريات بحسب توقعاتهم لاستنتاج تعميم مبدأ العد، وكتابته على اللوح، ثم مناقشتهم في حل المثال.

١٣- تكليف الطلبة حل التدريب (٣)، ثم مناقشة الإجابات على اللوح.

١٤- توضيح مفهوم مضروب العدد بذكر مثال عملي، مثل: إحضار (٣) مقاعد، واختيار (٣) طلاب للجلوس عليها، ثم سؤال الطالب الأول عن عدد الخيارات المتاحة له (ثلاثة خيارات)، ثم الطلب إليه الجلوس على أحد المقاعد، ثم سؤال الطالب الثاني عن عدد الخيارات المتاحة له (خياران فقط)، ثم الطلب إليه الجلوس على أحد المقعدين، ثم سؤال الطالب الثالث عن عدد الخيارات المتاحة له (خيار واحد فقط)، ثم الطلب إليه الجلوس على المقعد المتبقي.

١٥- استنتاج الطلبة أن الخيارات تتناقص بمقدار واحد حتى تصل إلى الواحد الصحيح.

١٦- التوضيح للطلبة أن هذا المفهوم يسمى مضروب العدد، ثم كتابته على اللوح بالأحرف والرموز.

١٧- مناقشة الطلبة في مقدمة موضوع (مضروب العدد الصحيح غير السالب) كما ورد في الكتاب المدرسي.

١٨- مناقشة الطلبة في المثال (٤)، ثم تكليفهم حل التدريب (٤)، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٩- مناقشة الطلبة في المثال (٥) على اللوح، ثم تكليفهم حل التدريب (٥) ضمن مجموعات ثنائية.
٢٠- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُـحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٢١- ختم الدرس بتقديم تغذية راجعة لما شُرِح من أفكار الدرس، بحيث تتضمن مناقشة الطلبة، وتوجيه أسئلة إليهم.
٢٢- تكليف الطلبة تعبئة سجل وصف سير التعلم.

أخطاء شائعة

عند جمع مضروبي عددين، قد يحسب بعض الطلبة مضروب مجموع العددين، مثل: ٤! + ٣! = ٧! وهذا خطأ، والصحيح هو:
٤! = ٢٤ ، ٣! =٦ وبالتالي ٤! + ٣! = ٢٤+٦= ٣٠،
ولكن ٧! = ٥٠٤٠

الفروق الفردية

علاج

- جد ناتج ٥! + ٣! ، (٥ +٣)!

إثراء

١) مضروب عدد صحيح موجب يساوي ثلاثة أضعاف مجموع مضروبي العددين السابقين له، فما هذا العدد؟
٢) ادَّعى أحمد أن مضروب أي عدد دائمًا هو أقل من مربع هذا العدد، هل توافق أحمد في ادِّعائه؟ برِّر إجابتك.
٣) تصفَّح موقع منصة إدراك للتعلم الإلكتروني (www.edraak.org)، وابحث فيه عن مقاطع فيديو تخص موضوع الدرس، وشاهدها، ثم اكتب تقريرًا عن ذلك.

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات (ملف الطالب).

أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١-٦).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

(موز، كوسا)، (موز، بطاطا)، (برتقال، كوسا)، (برتقال، بطاطا)، (تفاح، كوسا)، (تفاح، بطاطا)، (دراق، كوسا)، (دراق، بطاطا).

التدريب (٢)

عدد مرات ارتداء لباس مختلف = ٤×٣×٢ = ٢٤، وهذا لا يكفي مدة شهر كامل.

التدريب (٣)

أ) ٢٧ طريقة. ب) ٦ طرائق.

التدريب (٤)

٦! = ٧٢٠ طريقة.

التدريب (٥)

١) ن = ٥ ٢) ن = ٢

٣) ن = ٢ ٤) ن = ٥

الأسئلة

١) ١٠×٣٠×٢٩×٩

٢) ٣×٤×٢ = ٢٤

٣) ٩×٩×٩×٩×٢٨×٢٧

٤)

أ) ٧٢٠ ب) ١٢٨

جـ) ٣ د)٤٢×٦ = ٢٥٢

٥)

أ) ن = ٤ ب) ن = ٥

جـ) ن = ١

ثانيًا: التباديل.

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

- يتعرف مفهوم التباديل.
- يجد عدد تباديل مجموعة مكونة من (ن) من العناصر مأخوذة (ر) في كل مرة.
- يتعرف حالات خاصة في التباديل.
- يستخدم التباديل في حل مسائل حياتية.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

التباديل، ل(ن، ر).

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف العاشر، وحدة الإحصاء والاحتمالات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٢٢٩- ٢٣٣).

التعليم القبلي

مبدأ العد، مضروب العدد.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة، العمل في الكتاب المدرسي)، حل المشكلات والاستقصاء، التعلم في مجموعات (فكر- انتقِ زميلًا - شارك).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في مفهوم مبدأ العد، ومضروب العدد.

٢- كتابة المسألة الوارد ذكرها في بداية الدرس على اللوح.

٣- لفت انتباه الطلبة إلى وجود صيغة يمكن استخدامها في حساب عدد الطرائق مباشرة، ثم كتابة الصيغة الموجودة في الصفحة (٢٣٠) من الكتاب المدرسي بخط واضح على اللوح، ثم تطبيق الصيغة على المسألة السابقة، ثم المقارنة بين الإجابتين.

٤- لفت انتباه الطلبة إلى أهمية ترتيب العناصر في التباديل ل(ن، ر).

٥- عرض المثال (١) في الصفحة (٢٣٠) على اللوح، ثم مناقشة الطلبة في حله، ثم تكليفهم حل التدريب (١) في دفاترهم، ثم الطلب إلى أحدهم كتابة الحل الصحيح على اللوح.

٦- عرض المثال (٢) على اللوح، ثم مناقشة الطلبة في حله، ثم تكليفهم حل التدريب (٢) في دفاترهم، ثم مقارنة كل منهم إجابته بإجابة زميله.

٧- استخدام استراتيجية (فكر- انتقِ زميلًا - شارك) في تنفيذ نشاط (فكر وناقش) في الصفحة (٢٣١).

٨- بيان أهمية استخدام صيغة التباديل في حل معادلات رياضية معينة عن طريق مناقشة حل المثال (٣) على اللوح.

٩- تكليف كل طالب حل التدريب (٣) في دفتره، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم، ثم مقارنة كل منهم إجابته بإجابة زميله الذي بجانبه.

١٠- تنفيذ النشاط في الصفحة (٢٣٢) ضمن مجموعات، ثم ملاحظة النتائج.

١١- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٢- ختم الدرس بممارسة لعبة، أو عمل مسابقة بين الطلبة.

أخطاء شائعة

عند تطبيق قانون التباديل ل(ن، ر) قد يُجري بعض الطلبة عملية الضرب بدءًا بالعدد ن، وانتهاءً بالعدد ر+١، وليس(ن- ر+١). فمثلًا، قد يجدون ل(٧، ٥) على النحو الآتي: ٧ × ٦، وهذا خطأ، والصحيح هو: ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣

الفروق الفردية

علاج

- اكتب ما يأتي باستخدام رمز التباديل: ١) ١٤ × ١٣ × ١٢ ٢) ٦× ٥ × ٤ × ٣

إثراء

- يحتوي وعاء على بطاقات مرقمة بالأعداد: ١، ٢، ٣، ٠٠٠ ، ١٠، فإذا سحبنا (٣) بطاقات على التوالي من دون إرجاع، ثم سجلنا النتائج كل مرة، فكم نتيجة مختلفة يمكن أن تسفر عنها هذه التجربة؟

- تصفَّح موقع منصة إدراك للتعلم الإلكتروني (www.edraak.org)، وابحث فيه عن مقاطع فيديو تخص موضوع الدرس، وشاهدها، ثم اكتب تقريرًا عن ذلك.

استراتيجية التقويم: الملاحظة (الملاحظة التلقائية).

أداة التقويم: قائمة الرصد (٥-١).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

١) ل(٥ ، ٢) = ٢٠

٢) ٦×٥×٤×٣ + ٧×٦×٥×٤×٣+٢

التدريب (٢)

ل(٢٠، ٣) = ٢٠×١٩×١٨

التدريب (٣)

١)٨×٧×٦×٥= ١٦٨٠ ، ر= ٤

٢) ر=٢

الأسئلة

١)

ل(٩، ٥)= ٩×٨×٧×٦×٥

٢)

ل(٩، ٣)= ٩×٨×٧

٣)

أ) ٨×٧×٦ ب) ١٣ × ١٢ × ١١ × ١٠

جـ) ٢٠×١٩×١٨ د)١

٤)

أ) ل(١٧، ٥) ب) ل(ك، ٣)

٥)

أ) ن =١٠ ب) ر=٤

جـ) ن =١١

٦)

ل(٥، ٣) = ٦٠

ثالثًا: التوافيق. | **عدد الحصص:** حصتان.

النتاجات

- يتعرف مفهوم التوافيق.
- يجد عدد توافيق مجموعة مكونة من (ن) من العناصر مأخوذة (ر) في كل مرة.
- يتعرف حالات خاصة في التوافيق.
- يستخدم التوافيق في حل مسائل حياتية.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

- التوافيق، $\binom{ن}{ر}$.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف العاشر، وحدة الإحصاء والاحتمالات.

مصادر التعلم

الكتاب المدرسي، الصفحات (٢٣٤-٢٣٨).

التعليم القبلي

مبدأ العد، مضروب العدد، التباديل.

استراتيجيات التدريس

التدريب المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التفكير الناقد، حل المشكلات والاستقصاء، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بمراجعة الطلبة في مفهوم التباديل وشرطه (مراعاة أهمية الترتيب).

٢- عرض المسألة الوارد ذكرها في بداية الدرس، ثم توجيه الطلبة إلى حلها، ثم توضيح وجود صيغة يمكن استخدامها في حساب عدد الطرائق مباشرة، وبذلك يتم تقديم تعريف التوافيق.

٣- كتابة الصيغة الموجودة في الصفحة (٢٣٤) من الكتاب المدرسي بخط واضح على اللوح، ثم تطبيق الصيغة على المسألة السابقة، ثم المقارنة بين الإجابتين.

٤- تنبيه الطلبة لعدم أهمية ترتيب العناصر في التوافيق، وأن ذلك يساعدهم على التفريق بين التباديل والتوافيق.

٥- كتابة المثال (١) في الصفحة (٢٣٤) من الكتاب المدرسي على اللوح، ثم مناقشة الطلبة في حله.

٦- تكليف الطلبة حل التدريب (١) في دفاترهم ضمن مجموعات ثنائية، ثم كتابة الحل على اللوح.

٧- مناقشة الطلبة في المثالين (٢)، (٣)، ثم كتابة الإجابة على اللوح.

٨- تكليف الطلبة حل التدريب (٢) في دفاترهم بصورة فردية، ومتابعتهم في أثناء ذلك، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٩- مناقشة الطلبة في المثال (٤) لبيان أهمية استخدام صيغة التوافيق في حل معادلات رياضية معينة.

١٠- تكليف الطلبة حل التدريب (٣) ضمن مجموعات، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١١- تكليف الطلبة تنفيذ النشاط في صفحة (٢٣٥) ضمن مجموعات، وملاحظة النتائج، ثم كتابتها على اللوح.

١٢- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٣- ختم الدرس بسؤال الطلبة:

- ماذا نعني بالتوافيق؟
- ما شرط الحل باستخدام التوافيق؟

أخطاء شائعة

- قد يستخدم بعض الطلبة قانون التباديل في حل المسائل بدلًا من استخدام قانون التوافيق. ولعلاج ذلك، اطرح عليهم الأسئلة الآتية:
  - بكم طريقة يمكن اختيار شخصين من بين (٣) أشخاص؟
  - بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائبه من بين (٣) أشخاص؟
  - في أي السؤالين يكون الترتيب مهمًّا؟

الفروق الفردية

علاج

- جد ناتج ما يأتي:

١) $\binom{٤}{٣}$ ٢) $\binom{٥}{٤}$ ٣) $\binom{٦}{٦}$ ٤) $\binom{٦}{٦}$ ، $\binom{٦}{٠}$

إثراء

- استعمل الآلة الحاسبة لحل السؤال الأول في الصفحة (٢٣٨) من الكتاب المدرسي.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٥-٢).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

١) ٣٦ ٢) ٥٦ ٣) ١٠

التدريب (٢)

١) $\binom{٥}{٢}\binom{٦}{٣}+\binom{٥}{١}\binom{٦}{٤}+\binom{٥}{٠}\binom{٦}{٥}$ = ٢٠٠ + ٧٥ + ٦ = ٢٨١ طريقة.

٢) ٥ × ٤ × $\binom{٦}{٣}$ = ٤٠٠ طريقة.

التدريب (٣)

١) س=٣ أو س=١ ٢) س=٥+٧=١٢

الأسئلة

(١)

أ) $\frac{١٠٠ \times ٩٩ \times ٩٨}{٣ \times ٢}$ ب) ١

جـ) ١ د) ٤

(٢)

٤٥ طريقة.

(٣)

أ) ١٦ طريقة. ب) ١٠ طرائق. جـ) ٦٣ طريقة.

السؤال (٤)

أ) س = ٠,٥ أو س = ١ ب) ٢٦

أولًا: **المتغير العشوائي المنفصل وتوزيع ذي الحدين.**

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

- يتعرف مفهوم المتغير المنفصل.
- يتعرف مفهوم اقتران احتمال.
- يجد جدول التوزيع الاحتمالي.
- يتعرف توزيع ذي الحدين.
- يجد احتمال حادث باستخدام توزيع ذي الحدين.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

المتغير العشوائي، المتغير العشوائي المنفصل، التوزيع الاحتمالي، اقتران احتمال، تجربة برنولي، توزيع ذي الحدين، ل(س ر).

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف العاشر، وحدة الإحصاء والاحتمالات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٢٣٩– ٢٤٥).

التعليم القبلي

التباديل، التوافيق.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي)، حل المشكلات والاستقصاء، التعلم في مجموعات (تدريب زميل، فكر – انتقِ زميلًا – شارك).

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بكتابة عنوان الدرس والنتاجات على اللوح.

٢– البدء بمقدمة الدرس الوارد ذكرها في الكتاب المدرسي، ثم ذكر أمثلة على الموضوع، مثل:

- عدد مرات ظهور صورة عند إلقاء قطعة نقد مرات عدَّة.
- عدد مرات ظهور عدد فردي عند رمي قطعة نقد مرة واحدة.

٣- توجيه الطلبة إلى ذكر أمثلة أخرى.
٤- توضيح مفهوم المتغير العشوائي، ثم كتابة التعريف بخط واضح على اللوح، ثم مناقشة المثال (١) في الكتاب المدرسي، وتوضيح مفهوم جدول التوزيع الاحتمالي ومكوناته.
٥- استقصاء الطلبة لخصائص اقتران احتمال المتغير العشوائي، ثم كتابتها على اللوح.
٦- تكليف الطلبة حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٧- مناقشة الطلبة في حل المثال (٢) الذي يوضح كيفية إيجاد قيمة احتمال معين إذا عُلِم جدول التوزيع الاحتمالي.
٨- تكليف الطلبة حل التدريب (٢)، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٩- لفت انتباه الطلبة إلى وجود تجارب عشوائية معينة يكون فيها احتمالان، هما: النجاح، والفشل فقط، مثل: إصابة أحد الصيادين الهدف، وإجراء عملية جراحية، وزراعة نبتة، ثم توجيههم إلى ذكر أمثلة أخرى؛ تمهيدًا لتقديم تجربة برنولي، وتوزيع ذي الحدين.
١٠- كتابة صيغة توزيع ذي الحدين، ثم مناقشة الطلبة في دلالات رموزها.
١١- كتابة المثال (٣) على اللوح، ثم مناقشة الطلبة في حله، ثم الطلب إليهم حل التدريب (٣) ضمن مجموعات، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتشجيع أكثر المجموعات تعاونًا.
١٢- مناقشة الطلبة في المثال (٤).
١٣- استخدام استراتيجية (فكر- شارك- ناقش) في تنفيذ نشاط (فكر وناقش) في الصفحة (٢٤٤).
١٤- تكليف أحد الطلبة حل التدريب (٤) على اللوح.
١٥- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٦- ختم الدرس بتقديم تغذية راجعة لما شُرِح من أفكار الدرس.

أخطاء شائعة

قد لا يميِّز الطلبة بين القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي وعناصر الفضاء العيني. فمثلًا، إذا دل المتغير العشوائي على عدد الأطفال الذكور في عائلة لديها طفلان، فقد يكتب الطالب القيم كما يأتي: (و، و)، (و، ب)، (ب، و).

الفروق الفردية

علاج

- في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين، إذا دل المتغير العشوائي ع على عدد مرات ظهور صورة على الوجه الظاهر:

١) جد القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي ع.

٢) اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع.

٣) بيِّن أن ل هو اقتران احتمال للمتغير العشوائي ع.

إثراء

- حل السؤال الرابع من أسئلة الدرس بطريقتين.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: سلم التقدير (٥–٣).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

١) ع = ٠، ١، ٢

٢)

ع	٠	١	٢
ل(ع)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{٢}{٤}$	$\frac{١}{٤}$

٣) $\frac{١}{٤} + \frac{٢}{٤} + \frac{١}{٤} = ١$

ومنه: ل هو اقتران احتمال للمتغير العشوائي ع.

التدريب (٢)

ب = ٠,٢؛ لأن ٠,٢ + ٠,٣ + ٠,١ + ب = ١

التدريب (٣)

١) ٦ × (٠,٧)^{٥} (٠,٣)

٢) ل(س=٤) + ل(س=٥) + ل(س=٦)

$= ١٥(٠,٧)^{٤}(٠,٣)^{٢} + ٦ \times (٠,٧)^{٥}(٠,٣) + ١ \times (٠,٧)^{٦}$

٣) ل(س=٢) + ل(س=١) + ل(س=٠) $= ١٥ (٠,٧)^{٢}(٠,٣)^{٤} + ٦ (٠,٧) \times (٠,٣)^{٥} + ١ \times (٠,٣)^{٦}$

التدريب (٤)

$ل(س \leqslant ٣) = ١ - \left(ل(س = ٢) + ل (س=١) + ل (س=٠)\right)$

$= ١ - \left(٢١(٠,٦)^{٢} (٠,٤)^{٥} + ٧ (٠,٦) (٠,٤)^{٦} + ١ (٠,٤)^{٧}\right)$

الأسئلة

١)

أ) س= ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢

ب)

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

جـ) مجموع ل(س) = ١

∴ ل(س) اقتران احتمال.

٢)

أ = – ٠,٦

٣)

أ) ل(س=٢)= $٦ \times (٠,٦)^{٢} (٠,٤)^{٢}$

ب) ل(س ⩽ ٤)= ل(س= ٤) = $(٠,٦)^{٤}$

جـ) ل (س=١) + ل(س=٠) = $٤ \times (٠,٦)(٠,٤)^{٣} + (٠,٤)^{٤}$

٤)

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{٦٢٥}{٤٠٩٦}$	$\frac{١٥٠٠}{٤٠٩٦}$	$\frac{١٣٥٠}{٤٠٩٦}$	$\frac{٥٤٠}{٤٠٩٦}$	$\frac{٨١}{٤٠٩٦}$

ثانيًا: العلامة المعيارية.

عدد الحصص: حصتان.

النتاجات

- يتعرف مفهوم العلامة المعيارية.
- يحسب العلامة المعيارية، ويفسرها.
- يستخدم العلامة المعيارية في حل مسائل عملية.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

العلامة المعيارية: $z_{س}$ ، الانحراف المعياري: ع، المتوسط الحسابي: $\overline{س}$.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف العاشر، وحدة الإحصاء والاحتمالات.
- كتاب الرياضيات، الصفان: الثامن والعاشر، حل أنظمة المعادلات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٢٤٦- ٢٥١).

التعليم القبلي

المتوسط الحسابي، الانحراف المعياري، حل نظام معادلتين خطيتين جبريًّا.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، حل المشكلات والاستقصاء، التعلم عن طريق النشاط (الرواية)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بكتابة عنوان الدرس والنتاجات على اللوح.

٢- قراءة القصة الآتية على الطلبة:

أحمد طالب في الصف الثاني عشر يعيش ظروفًا اقتصادية صعبة اضطرته إلى العمل مع والده في الحقول للمساهمة في تأمين حاجات أسرته التي تقطن في بيت محدود المساحة والغرف، حتى إنه كان يدرس في الغرفة التي يشاركه فيها إخوته. وبالرغم من ذلك فقد حصل على معدل ٨٥ في المئة، أمّا محمود فكان يعيش في رغد من العيش؛ إذ وفَّر له والده جميع حاجاته، وكانت لديه غرفته الخاصة، وتمكَّن من شراء ما يلزمه للدراسة، وحصل في نهاية المطاف على معدل ٨٦ في المئة:

- برأيك، أي الطالبين مستوى ذكائه أكثر: أحمد أم محمود؟
- ما المعايير التي استندت إليها في إطلاق هذا الحكم؟

٣- مناقشة الطلبة في مقدمة الدرس، وسؤالهم عن معايير الحكم على المستوى التحصيلي الأفضل.

٤- تعريف العلامة المعيارية، ثم كتابة التعريف بخط واضح على اللوح.

٥- مناقشة الطلبة في المثال (١)، ثم كتابة حله على اللوح.

٦- تكليف الطلبة حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٧- مناقشة الطلبة في حل المثال (٢)، ثم تكليفهم حل التدريب (٢)، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

٨- مناقشة الطلبة في حل المثالين (٣)، و(٤) على اللوح.

٩- تكليف الطلبة حل التدريب (٣) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١٠- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.

١١- ختم الدرس بتكليف الطلبة تعبئة نموذج سجل وصف سير التعلم.

أخطاء شائعة

عدم التفريق بين العلامة المعيارية والعلامة الخام.

الفروق الفردية

علاج

- إذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم هو (٥٠)، والانحراف المعياري لها هو (٢)، فجد ما يأتي:
  ١) العلاقة المعيارية للقيمة (٤٧).
  ٢) القيمة التي تنحرف انحرافين معياريين فوق المتوسط الحسابي.

إثراء

- تصفَّح موقع منصة إدراك للتعلم الإلكتروني (www.edraak.org)، وابحث فيه عن مقاطع فيديو تخص موضوع الدرس، وشاهدها، ثم اكتب تقريرًا عن ذلك.

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات.

أداة التقويم: نموذج وصف سير التعلم (١-٦).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

$ز_{٣٨} = -\frac{١}{٢}$

التدريب (٢)

المتوسط الحسابي $= \overline{س} = ٦٨$

التدريب (٣)

$ز_{٩٠} = ٢,٥$

الأسئلة

١)

$ز_{٥٤} = -٢$ ، $ز_{٧٢} = ٤$

٢)

أ) س $= ١٧٢$ ب) ١٥١

٣)

المتوسط الحسابي $= \overline{س} = ٤$

٤)

المتوسط الحسابي $= \overline{س} = ٢٢$

الانحراف المعياري $= ع = \frac{١٠}{٣}$

ثالثًا: التوزيع الطبيعي.

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

- يتعرف منحنى التوزيع الطبيعي، وخصائصه.
- يستخدم خصائص منحنى التوزيع الطبيعي في حل مسائل عملية.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

التوزيع الطبيعي، التوزيع الطبيعي المعياري.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف العاشر، وحدة الإحصاء والاحتمالات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٢٥٢- ٢٥٩).

التعليم القبلي

العلامة المعيارية، المتوسط الحسابي، الانحراف المعياري.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي)، حل المشكلات، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بعرض المثال الآتي:

أراد محمد أن يتعرَّف مستوى تحصيل الطلبة في إحدى المدارس، فحسب معدلاتهم النهائية. وقد أظهرت النسب أن عددًا قليلًا منهم كان مستوى تحصيله مرتفعًا، وأن عددًا قليلًا منهم كان مستوى تحصيله منخفضًا، في حين كان معظم الطلبة من ذوي التحصيل المتوسط.

٢- التعبير عن ذلك برسم منحنى التوزيع الطبيعي؛ لتقديم منحنى التوزيع الطبيعي.

٣- توجيه الطلبة إلى ذكر أمثلة أخرى على ظواهر تتوزع بياناتها توزيعًا طبيعيًّا.

٤- ذكر خصائص التوزيع الطبيعي للطلبة.

٥- توزيع الطلبة إلى مجموعات، ثم تكليفهم تنفيذ النشاط في الصفحة (٢٥٣)، واستقصاء خصائص التوزيع الطبيعي المعياري.

٦- استعراض جدول التوزيع الطبيعي، وكيفية حساب قيمة المتغير ز عن طريق استخدام المنظمات البصرية التي تعالج جميع الحالات.
٧- كتابة المثال (١) على اللوح، ثم مناقشة الطلبة في حله، ثم تكليفهم حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٨- مناقشة الطلبة في حل المثال (٢) الذي يعرض كيفية التعامل مع تحويل المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري.
٩- تكليف الطلبة حل التدريب (٢)، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٠- لفت انتباه الطلبة إلى أهمية استخدام التوزيع الطبيعي في حل مسائل حياتية، وذلك بعرض المثال (٣)، ثم تكليفهم حل التدريب (٣) ضمن مجموعات.
١١- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٢- ختم الدرس بتقديم تغذية راجعة لما شُرِح من أفكار الدرس.

أخطاء شائعة

قد يخطئ بعض الطلبة بعدم تحويل المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي إلى توزيع طبيعي معياري لإيجاد احتمال وقوعه.

الفروق الفردية

علاج

- بيِّن خصائص التوزيع الطبيعي المعياري.

إثراء

- جد ل (−١,٧ ≤ ز ≤ ٠).

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات. أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١-٦).

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء. أداة التقويم: سلم التقدير اللفظي (٣-٣).

التدريبات

التدريب (١)

١) ٠,٩٩١٨ ٢) ٠,٩٩٧٨

٣) ٠,١٢٧١ ٤) ٠,٨٥١١

التدريب (٢)

١) ٠,٩٤٥٢ ٢) ٠,٥٦٧٠

الأسئلة

١)

أ) ٠,٨٨٤٩ ب) ٠,٩٩٦٢

جـ) ٠,٨٩٨٠ د) ٠,٠١٦٢

هـ)٠,٧٤١٤

٢)

أ) ٠,٢١١٩ ب) ٠,٠٥٤٨

٣)

أ) ٠,٠٦٦٨ ب) ٠,٩٥٩٦

جـ) ٣٠٩

٤)

٣٠,٨٥٪

أولًا: الارتباط.

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

- يتعرف مفهوم الارتباط.
- يرسم شكل الانتشار بين متغيرين، ويحدد نوع الارتباط من شكل الانتشار.
- يحسب معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين.
- يتعرف أثر التعديلات الخطية في معامل الارتباط.
- يحل مسائل حياتية باستخدام معامل الارتباط.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

الارتباط، معامل الارتباط، شكل الانتشار، (ر).

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف العاشر، وحدة الإحصاء والاحتمالات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٢٦٠ - ٢٦٩).

التعليم القبلي

العلاقة الطردية، العلاقة العكسية، الاقتران الخطي وتمثيله بيانيًّا.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (العمل في الكتاب المدرسي)، التعلم في مجموعات (فكر- انتقِ زميلًا - شارك)، أخرى (الاستقصاء الموجه).

إجراءات التنفيذ

١- التمهيد للدرس بكتابة عنوان الدرس والنتاجات على اللوح.

٢ - تفسير معنى (ارتباط) في اللغة العربية.

٣- ذكر أمثلة من واقع الحياة على متغيرات مترابطة، مثل: العلاقة بين عدد ساعات العمل والأجرة، والعلاقة بين مستوى التحصيل وعدد ساعات الدراسة، والعلاقة بين زمن الوصول وسرعة السيارة.

٤- توجيه الطلبة إلى ذكر أمثلة أخرى على علاقات ارتباطية بين متغيرين.

٥- لفت انتباه الطلبة إلى وجود نوعين من العلاقات المرتبطة (طردية، وعكسية)، وتوضيح مفهوم كل منهما.

٦- توجيه الطلبة إلى تصنيف الأمثلة التي ذكروها سابقًا إلى علاقات عكسية وطردية.
٧- توضيح مفهوم شكل الانتشار وأهميته في الحكم على نوع العلاقة.
٨- توضيح كيفية الحكم على نوع العلاقة عن طريق شكل الانتشار باستخدام المنظمات البصرية.
٩- كتابة المثال (١) على اللوح، ثم مناقشة الطلبة في حله، ثم تكليفهم حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٠- تنبيه الطلبة لضرورة وجود مقياس يقيس قيمة العلاقة قياسًا دقيقًا؛ لأن شكل الانتشار يُظهِر تقديرًا للحكم على قيمة الارتباط، ولا يُمثِّل تقديرًا دقيقًا للقيمة الحقيقية.
١١- كتابة قانون معامل الارتباط على اللوح، ثم شرح عناصره وكيفية إيجادها.
١٢- مناقشة الطلبة في حل المثال (١) باستخدام قانون معامل الارتباط، ثم المقارنة بين القيمتين، ثم تكليفهم حل التدريب ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٣- حل المثال (٣) بمشاركة الطلبة، ثم تكليفهم حل التدريب (٣) ضمن مجموعات.
١٤- استقصاء أثر التعديلات الخطية في معامل الارتباط بتكليف الطلبة حل أسئلة النشاط في الصفحة (٢٦٧) ضمن مجموعات، ثم مناقشتهم في الإجابات، ثم كتابة الصحيح منها على اللوح.
١٥- استخدام استراتيجية (فكر- انتقِ زميلًا - شارك) في تنفيذ نشاط (فكر وناقش).
١٦- كتابة المثال (٣) على اللوح.
١٧- تكليف الطلبة حل التدريب (٤) فرادى، ثم مقارنة كل طالب إجابته بإجابة زميله الذي بجانبه.
١٨- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١٩- ختم الدرس بتقديم تغذية راجعة لما شُرِح من أفكار الدرس.

أخطاء شائعة

قد يعتقد بعض الطلبة أن قيمة الارتباط الموجبة أقوى من القيمة السالبة دائمًا؛ لذا يجب تذكيرهم أن قوة العلاقة تزداد كلما اقتربنا من الأطراف (العددان: ١، و -١).

الفروقات الفردية

علاج

- أي معاملي الارتباط الآتيين أقوى: -٠,٨ أم ٠,٧؟

إثراء

- إذا كانت ص = ٢س، فما نوع الارتباط بين المتغيرين س، ص؟ ما قوة الارتباط؟ فسِّر إجابتك.

استراتيجية التقويم: مراجعة الذات. أداة التقويم: سجل وصف سير التعلم (١-٦).

إجابات التدريبات والأسئلة

التدريبات

التدريب (١)

علاقة عكسية.

التدريب (٢)

$$\frac{-٢٥}{\sqrt{٧٢ \times ٤٢}}$$

التدريب (٣)

ر = $\frac{١}{٣}$ ، علاقة طردية.

التدريب (٤)

أ) ٠,٦٥ ب) ٠,٦٥ جـ)-٠,٦٥

الأسئلة

١)

علاقة عكسية.

٢)

$$ر = \frac{-١}{\sqrt{٤٢ \times ١٨}}$$

٣)

- $\frac{٧٠٠}{٩٥٤}$ ، علاقة عكسية.

٤)

- ٠,٠٨ ، علاقة عكسية.

٥)

- ٠,٩

٦)

أ) ٠,٨٥ ب)٠,٨٥ جـ) -٠,٨٥

ثانيًا: **الانحدار.**

عدد الحصص: ثلاث حصص.

النتاجات

- يتعرف مفهوم خط الانحدار، وأهميته.
- يجد معادلة خط الانحدار البسيط بين متغيرين.
- يطبِّق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيمة أحد المتغيرين، ويجد الخطأ في التنبؤ.
- يستخدم معادلة خط الانحدار في حل مسائل حياتية.

المفاهيم والمصطلحات والرموز

معادلة خط الانحدار، القيمة المتنبأ بها: $\hat{ص}_ر$ ، الخطأ في التنبؤ = $ص_ر - \hat{ص}_ر$.

التكامل الرأسي

- كتاب الرياضيات، الصف العاشر، وحدة الإحصاء والاحتمالات.

مصادر التعلم

- الكتاب المدرسي، الصفحات (٢٧٠ – ٢٧٥).

التعليم القبلي

الارتباط.

استراتيجيات التدريس

التدريس المباشر (الأسئلة والأجوبة)، التعلم في مجموعات (التعلم التعاوني الجماعي)، التفكير الناقد.

إجراءات التنفيذ

١– التمهيد للدرس بعرض مقدمة الدرس، ثم مناقشتها مع الطلبة.

٢– بيان أهمية دراسة البيانات الحالية في التنبؤ بما سيحدث مستقبلًا، مثل دراسة عدد السيارات المبيعة في شهور معينة للتنبؤ بمبيعات الشهر التالي وهكذا.

٣– توجيه الطلبة إلى ذكر أمثلة أخرى على علاقات تستخدم في التنبؤ بقيم مستقبلًا.

٤– لفت انتباه الطلبة إلى إمكانية وجود خطأ في التنبؤ، وأنه كلما كان الخطأ في التنبؤ قليلًا اقتربنا من القيمة الحقيقية.

٥– كتابة قاعدة الخطأ في التنبؤ على اللوح، ثم شرحها للطلبة.

٦– كتابة القانون الذي يستخدم في إيجاد معادلة خط الانحدار، وكيفية إيجادها، وشرح عناصر هذا القانون.

٧- حل المسألة الوارد ذكرها في بداية الدرس بمشاركة الطلبة.
٨- مناقشة الطلبة في حل المثال (١)، ثم تكليفهم حل التدريب (١) ضمن مجموعات ثنائية، ومتابعتهم في هذه الأثناء، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
٩- مناقشة الطلبة في حل المثال (٢)، ثم تكليفهم حل التدريب (٢) ضمن مجموعات.
١٠- تكليف الطلبة بواجب بيتي تُحَلُّ فيه بعض أسئلة الدرس، ويُحَلُّ بعضها الآخر في الصف، ومتابعتهم، وتقديم التغذية الراجعة لهم.
١١- ختم الدرس بتقديم تغذية راجعة لما شُرِح من أفكار الدرس.

أخطاء شائعة

قد يعتقد بعض الطلبة أن الخطأ في التنبؤ دائمًا موجب أو سالب، وأنه لا يساوي صفرًا.

الفروقات الفردية

علاج

- يبين الجدول الآتي العلاقة بين المتغيرين س، ص:

س: رقم اليوم	١	٢	٣	٤	٥
ص: عدد الأشخاص الذين ذهبوا إلى المهرجان	٢٠	١٧	١٣	٩	٦

جد الخطأ في تنبؤ عدد الأشخاص الذين ذهبوا إلى المهرجان في اليوم الثالث.

إثراء

- وضِّح بيانيًّا متى يكون الخطأ في التنبؤ موجبًا، وسالبًا، وصفرًا.

استراتيجيات التقويم وأدواته

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء، الورقة والقلم.
أداة التقويم : الاختبار القصير.

التدريبات

التدريب (١)

١) ص= ١,٤ س – ٣٥ ٢) ٨٨,٢ ٣) – ٣

التدريب (٢)

١) ٧ ٢) – ٤

الأسئلة

١)

أ)ص= ٠,٣٢ س + ٤٥,٦ ب)٧٣,٧٦ جـ) ٥,٦

٢)

ص= ٢س+١٥

٣)

٩٣٩٠ دينارًا.

إجابات أسئلة الوحدة

١)

٨٦٤٠٠ طريقة.

٢)

ر = ٣

٣)

س	٠	١	٢
ل(س)	٠,٣٦	٠,٤٨	٠,١٨

٤)

س = ٣٤

٥)

ب = ٠,١

٦)

أ) ر = −٠,٨ ب) ر = −٠,٨

٧)

أ) ص = ١,١ س +٣,٧ ب) ١٩,١

جـ) −١,١

٨)

أ) ٠,٩٥٥٤ ب) ٠,٩٨٤٢

جـ) ٠,٨٢٩ د) ٠,٠٠٦٢

هـ) ٠,٧٧٠٩

٩)

أ) ٠,١٥٨٧ ب) ٠,٢٧٤٣

١٠)

أ) ٠,١٥٨٧ ب) ٠,٩٥٤٤

جـ) ٩٧٧ طالبة تقريبًا.

استراتيجية التقويم: الملاحظة.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٥-١).

الرقم	اسم الطالب	يتعرف مفهوم التباديل.		يحل مسائل تطبيقية على خصائص التباديل.		يطبق قانون التباديل.		يحل معادلات باستخدام التباديل.		يحل مسائل عملية باستخدام التباديل.		المجموع
		نعم	لا	نعم	لا	نعم	لا	نعم	لا	نعم	لا	

استراتيجية التقويم: التواصل.

أداة التقويم: قائمة الرصد (٥-٢).

الرقم	اسم الطالب	يتعرف مفهوم التوافيق.		يحل مسائل تطبيقية على خصائص التوافيق.		يطبق قانون التوافيق.		يحل معادلات باستخدام التوافيق.		يحل مسائل عملية باستخدام التوافيق.		المجموع
		نعم	لا	نعم	لا	نعم	لا	نعم	لا	نعم	لا	

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: سلم التقدير (٥-٣).

الرقم	اسم الطالب	يجد جدول التوزيع الاحتمالي.					يحل مسائل باستخدام توزيع ذي الحدين.					يحل مسائل عملية على المتغير العشوائي وتوزيع ذي الحدين.					المجموع
		١	٢	٣	٤	٥	١	٢	٣	٤	٥	١	٢	٣	٤	٥	
١																	
٢																	
٣																	
٤																	
٥																	
٦																	
٧																	
٨																	
٩																	
١٠																	

(٥) إذا أنجز الطالب المهمة بصورة صحيحة، من دون مساعدة.

(٤) إذا أنجز الطالب المهمة بصورة صحيحة، مع مساعدة قليلة.

(٣) إذا أنجز الطالب المهمة بمساعدة قليلة.

(٢) إذا أنجز الطالب المهمة بمساعدة كبيرة.

(١) إذا لم ينجز الطالب المهمة.

استراتيجية التقويم: التقويم المعتمد على الأداء.

أداة التقويم: الاختبار القصير.

يبين الجدول الآتي علامات (٥) طلاب في مادتي التاريخ والجغرافيا:

رقم الطالب	١	٢	٣	٤	٥
التاريخ س	٢	٧	٧	٩	١٠
الجغرافيا ص	٣	٥	٥	٨	٩

– جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س.

– احسب الخطأ في التنبؤ بعلامة طالب في مادة الجغرافيا، علمًا بأن علامته في مادة التاريخ ٤

أولًا: المراجع العربية

١- إدارة المناهج والكتب المدرسية، **الإطار العام للمناهج والتقويم**، ط٢، ٢٠١٣م.

٢- الفريق الوطني للتقويم، **استراتيجيات التقويم وأدواته (الإطار النظري)**، إدارة الامتحانات والاختبارات، وزارة التربية والتعليم، ٢٠٠٤م.

٣- فريد أبو زينة، **الرياضيات مناهجها وطرق تدريسها**، مكتبة الفلاح- الكويت، ٢٠٠٣م.

٤- منصور عوض، **مبادئ الإحصاء**، عمّان: دار الصفاء للنشر، ٢٠٠٦م.

ثانيًا: المراجع الأجنبية

1- Howard Anton, Irl Bivens, Stephen Davis - **Calculus Early Transcedentals** - Tenth Edition.

2- Larson, Hosttler - **Precalculus** - 7th Edition - boston.

3- Salas, Hille, Etgen - **Calculus One And Several Variables** - Tenth Edition 2007 John Willy and sons.

تم بحمدالله